Tutorium:
Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Bonusklausur am 13.05.2013

Lösungen der Aufgaben

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 1a

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden: $x < -\frac{7}{3}$ und $x > -\frac{7}{3}$.

<u>Fall 1: $x < -\frac{7}{3}$</u>

$$\begin{aligned} & \frac{7}{3x+7} \leq \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \quad & 21 \geq 3x+7 \\ \Leftrightarrow \quad & 14 \geq 3x \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Es folgt $L_1 = \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right)$.

<u>Fall 2: $x > -\frac{7}{3}$</u>

$$\begin{aligned} & \frac{7}{3x+7} \leq \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \quad & 21 \leq 3x+7 \\ \Leftrightarrow \quad & 14 \leq 3x \\ \Leftrightarrow \quad & x \geq \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Es folgt $L_2 = \left[\frac{14}{3}, \infty\right)$.

Insgesamt ergibt sich $L = L_1 \cup L_2 = \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right) \cup \left[\frac{14}{3}, \infty\right)$.

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 1b I

Es sind drei Fälle zu unterscheiden: $x < -\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{5} \leq x < \frac{1}{2}$ und $x > \frac{1}{2}$.

Fall 1: $x < -\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned} & \frac{|5x+1|}{2x-1} < -\frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow\ & -15x-3 > -4x+2 \\ \Leftrightarrow\ & -11x > 5 \\ \Leftrightarrow\ & x < -\frac{5}{11} \end{aligned}$$

Es folgt $L_1 = \left(-\infty, -\frac{5}{11}\right)$.

Fall 2: $-\frac{1}{5} \leq x < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} & \frac{|5x+1|}{2x-1} < -\frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow\ & 15x+3 > -4x+2 \\ \Leftrightarrow\ & 19x > -1 \\ \Leftrightarrow\ & x > -\frac{1}{19} \end{aligned}$$

Es folgt $L_2 = \left(-\frac{1}{19}, \frac{1}{2}\right)$.

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 1b II

<u>Fall 3: $x > \frac{1}{2}$</u>

$$\begin{aligned} & \frac{|5x+1|}{2x-1} && < && -\frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow \quad & 15x+3 && < && -4x+2 \\ \Leftrightarrow \quad & 19x && < && -1 \\ \Leftrightarrow \quad & x && < && -\frac{1}{19} \end{aligned}$$

Es folgt $L_3 = \emptyset$.

Es folgt $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \left(-\infty, -\frac{5}{11}\right) \cup \left(-\frac{1}{19}, \frac{1}{2}\right)$.

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 1c

Es müssen die folgenden Fälle unterschieden werden:

- $x < -2$
- $-2 < x < \frac{4}{9}$
- $\frac{4}{9} \leq x < 3$
- $3 < x < 8$
- $x \geq 8$

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 2

Als Grenzwert ergibt sich $a = -\frac{1}{4}$. Überprüfen mithilfe der Definition der Konvergenz:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{-n+2}{4n} - \left(-\frac{1}{4}\right) \right| && < && \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \left| \frac{1}{2n} \right| && < && \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2n} && < && \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2\varepsilon} && < && n
\end{aligned}$$

Für alle $n > N = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Damit ist gezeigt, dass es sich bei $a = -\frac{1}{4}$ tatsächlich um den gesuchten Grenzwert handelt.

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 3

Für die Folge $b_n = (-1)^n$ könnte mit $\varepsilon = 2$ beispielsweise der vermeintliche Grenzwert $b = 0$ bewiesen werden.

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 4 (i)-(ii)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-9n^4+n^2-5n+2}{4n^4+3n^3-26}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4\left(-9+\frac{1}{n^2}-\frac{5}{n^3}+\frac{2}{n^4}\right)}{n^4\left(4+\frac{3}{n}-\frac{26}{n^4}\right)}\right)$$

$$= \frac{9}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3-11n^2+6}{-n^4+3n-99}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3\left(5-\frac{11}{n}+\frac{6}{n^3}\right)}{n^4\left(-1+\frac{3}{n^3}-\frac{99}{n^4}\right)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{-n}\right) = 0$$

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 4 (iii)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^6+3n^2-2}+3n}{4n^2+7n-28}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^6\left(1+\frac{3}{n^4}-\frac{2}{n^6}\right)}+3n}{n^2\left(4+\frac{7}{n}-\frac{28}{n^2}\right)}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^6}\cdot\sqrt{1+\frac{3}{n^4}-\frac{2}{n^6}}+3n}{n^2\left(4+\frac{7}{n}-\frac{28}{n^2}\right)}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^4}-\frac{2}{n^6}}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{7}{n}-\frac{28}{n^2}\right)}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{4}\right)\\
&= \infty
\end{aligned}
$$

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 4 (iv)

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+n-2}{2n^2+2}-\frac{14n^2+8n+7}{4n^2-9}\right) \\
= \quad & \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\left(5+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{2}{n^2}\right)}-\frac{n^2\left(14+\frac{8}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(4-\frac{9}{n^2}\right)}\right) \\
= \quad & \frac{5}{2}-\frac{7}{2} \;=\; -1
\end{aligned}
$$

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 4 (v)

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+5n-8}{6n+1}+\frac{-2n^2+3n-4}{4n-7}\right) \\
= \quad & \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(4n-7\right)\left(3n^2+5n-8\right)+\left(6n+1\right)\left(-2n^2+3n-4\right)}{\left(6n+1\right)\left(4n-7\right)}\right) \\
= \quad & \lim_{n\to\infty}\left(\frac{12n^3+20n^2-32n-21n^2-35n+56+-12n^3+18n^2-24n-2n^2+3n-4}{24n^2-38n-7}\right) \\
= \quad & \lim_{n\to\infty}\left(\frac{15n^2+88n+52}{24n^2-38n-7}\right) \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\left(15+\frac{88}{n}+\frac{52}{n^2}\right)}{n^2\left(24-\frac{38}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}\right) \;=\; \frac{5}{8}
\end{aligned}
$$

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 5

(i) Geometrische Reihe mit $q = -\frac{4}{7}$. Konvergent wegen $|q| < 1$. Grenzwert:

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{4}{7}\right)} - \left(-\frac{4}{7}\right)^0 - \left(-\frac{4}{7}\right)^1 = \frac{7}{11} - 1 + \frac{4}{7} = \frac{16}{77}$$

(ii) Harmonische Reihe mit $\alpha = 1$. Divergent.

(iii) Geometrische Reihe mit $q = \frac{5}{2}$. Divergent weden $|q| > 1$.

(iv) Harmonische Reihe mit $\alpha = 3$. Konvergent.

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 6a

Für die ersten Partialsummen ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \frac{3}{2} \\
s_2 &= s_1 + \frac{3}{6} = 2 \\
s_3 &= s_2 + \frac{3}{12} = \frac{9}{4} \\
s_4 &= s_3 + \frac{3}{20} = \frac{12}{5}
\end{aligned}
$$

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 6b

Berechnung des Grenzwerts der Reihe:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{3}{k(k-1)}\right) &= \lim_{n\to\infty} 3\cdot\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(3\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= 3
\end{aligned}$$

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 7 I

Auf den Intervallen $(0,2)$, $(2,5)$, $(5,11)$ und $(11,12)$ ist die Funktion f stetig, da sie für jedes dieser Intervalle ein Polynom ist und Polynome auf ihrem Definitionsbereich immer stetig sind.

Es müssen lediglich die Stellen $x_0 = 2, 5, 11$ auf ihre Stetigkeit geprüft werden.

$$\begin{aligned} f(2) &= 6 \\ \lim_{x_n \to 2^-} \Big(f(x_n)\Big) &= \lim_{x_n \to 2^-} \Big(x_n^2 + 2\Big) = 6 \\ \lim_{x_n \to 2^+} \Big(f(x_n)\Big) &= \lim_{x_n \to 2^+} \Big(-\frac{1}{2}x_n + 7\Big) = 6 \end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{x_n \to 2^-} \Big(f(x_n)\Big) = f(2) = \lim\limits_{x_n \to 2^+} \Big(f(x_n)\Big)$ ist die Funktion f an der Stelle $x_0 = 2$ stetig.

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 7 II

$$
\begin{aligned}
f(5) &= 4 \\
\lim_{x_n \to 5^-} \Big(f(x_n)\Big) &= \lim_{x_n \to 5^-} \Big(-\frac{1}{2}x_n + 7\Big) = \frac{9}{2} \\
\lim_{x_n \to 5^+} \Big(f(x_n)\Big) &= \lim_{x_n \to 5^+} \Big(x - 1\Big) = 4
\end{aligned}
$$

Wegen $\lim\limits_{x_n \to 5^-} \Big(f(x_n)\Big) \neq \lim\limits_{x_n \to 5^+} \Big(f(x_n)\Big)$ ist die Funktion f an der Stelle $x_0 = 5$ nicht stetig.

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 7 III

$$
\begin{aligned}
f(11) &= 10 \\
\lim_{x_n \to 11^-} \Big(f(x_n)\Big) &= \lim_{x_n \to 11^-} \Big(x - 1\Big) = 10 \\
\lim_{x_n \to 11^+} \Big(f(x_n)\Big) &= \lim_{x_n \to 11^+} \Big(2x - 12\Big) = 10
\end{aligned}
$$

Wegen $\lim\limits_{x_n \to 11^-} \Big(f(x_n)\Big) = f(11) = \lim\limits_{x_n \to 11^+} \Big(f(x_n)\Big)$ ist die Funktion f an der Stelle $x_0 = 11$ stetig.

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 8a

Aufgrund der Stetigkeit der beteiligten Funktionen und der Tatsache, dass die Nacheinanderausführung stetiger Funktionen wiederum stetig ist, ist f für $x \neq 0$ stetig. Es muss nur noch die Stelle $x_0 = 0$ überprüft werden.

Es sei $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi n + \frac{\pi}{84}}}$ eine Folge mit $(x_n) \to x_0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\Big(f(x_n)\Big) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(\frac{42}{x_n^3}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(\frac{42}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi n+\frac{\pi}{84}}}\right)^3}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(42\cdot\left(2\pi n + \frac{\pi}{84}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(84\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1
\end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(f(x_n)\Big) \neq f(x_0)$ ist f an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig.

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 8b

Abschätzen des Grenzwerts:

$$\lim_{x_n \to 0} \left(-\sqrt{x_n}\right) \leq \lim_{x_n \to 0} \left(\sqrt{x_n} \cdot \sin\left(\frac{42}{x_n^3}\right)\right) \leq \lim_{x_n \to 0} \left(\sqrt{x_n}\right).$$

Hieraus folgt

$$0 \leq \lim_{x_n \to 0} \left(\sqrt{x_n} \cdot \sin\left(\frac{42}{x_n^3}\right)\right) \leq 0.$$

Nach dem Einschließungssatz folgt

$$\lim_{x_n \to 0} \left(\sqrt{x_n} \cdot \sin\left(\frac{42}{x_n^3}\right)\right) = 0.$$

Wegen $\lim\limits_{x_n \to 0} \Big(g(x_n)\Big) = g(x_0)$ ist g an der Stelle $x_0 = 0$ stetig.

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 9

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(\frac{\pi n^3+7n-2}{4n^3+n^2-1}\right)\right) &= \sin\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi n^3+7n-2}{4n^3+n^2-1}\right)\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{9n^2-n+5}{4n^2+2n+8}} &= \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n^2-n+5}{4n^2+2n+8}\right)}\\ &= \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Die Stetigkeit der cos- bzw. der $\sqrt{}$-Funktion wurde verwendet, um $\lim\limits_{n\to\infty}$ in die jeweilige Funktion zu ziehen.

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 10a-b

$$\text{a)} \quad f_1'(x) = 20x^4 - 3x^2 + 10x + 1$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad f_2'(x) &= \left(x^e\right)' \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \log_2 x + x^e \cdot \left(\cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right)\right)' \cdot \log_2 x \\
&\quad + x^e \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \left(\log_2 x\right)' \\
&= e x^{e-1} \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \log_2 x - x^e \cdot \sin\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \frac{5}{2\sqrt{x}} \cdot \log_2 x \\
&\quad + x^e \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 2}
\end{aligned}$$

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 10c I

$$
\begin{aligned}
f_3'(x) &= \cos\left(\sqrt{\ln\left(\tan\left((3^x+1)^2\right)\right)}\right)\cdot\left(\sqrt{\ln\left(\tan\left((3^x+1)^2\right)\right)}\right)' \\
&= \frac{\cos\left(\sqrt{\ln\left(\tan\left((3^x+1)^2\right)\right)}\right)\cdot\left(\ln\left(\tan\left((3^x+1)^2\right)\right)\right)'}{2\cdot\sqrt{\ln\left(\tan\left((3^x+1)^2\right)\right)}} \\
&= \frac{\cos\left(\sqrt{\ln\left(\tan\left((3^x+1)^2\right)\right)}\right)\cdot\left(\tan\left((3^x+1)^2\right)\right)'}{2\cdot\sqrt{\ln\left(\tan\left((3^x+1)^2\right)\right)}\cdot\tan\left((3^x+1)^2\right)} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 10c II

$$= \frac{\cos\left(\sqrt{\ln\left(\tan\left((3^x+1)^2\right)\right)}\right) \cdot \left((3^x+1)^2\right)'}{2 \cdot \sqrt{\ln\left(\tan\left((3^x+1)^2\right)\right)} \cdot \tan\left((3^x+1)^2\right) \cdot \cos^2\left((3^x+1)^2\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\sqrt{\ln\left(\tan\left((3^x+1)^2\right)\right)}\right) \cdot 2 \cdot (3^x+1) \cdot (3^x+1)'}{2 \cdot \sqrt{\ln\left(\tan\left((3^x+1)^2\right)\right)} \cdot \tan\left((3^x+1)^2\right) \cdot \cos^2\left((3^x+1)^2\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\sqrt{\ln\left(\tan\left((3^x+1)^2\right)\right)}\right) \cdot 2 \cdot (3^x+1) \cdot 3^x \cdot \ln 3}{2 \cdot \sqrt{\ln\left(\tan\left((3^x+1)^2\right)\right)} \cdot \tan\left((3^x+1)^2\right) \cdot \cos^2\left((3^x+1)^2\right)}$$

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 10d

Es gilt

$$f_4(x) \;=\; (\sin x)^{3x^2-x+3} \;=\; e^{\ln\left((\sin x)^{3x^2-x+3}\right)} \;=\; e^{(3x^2-x+3)\cdot\ln(\sin x)}$$

$$\begin{aligned}
f_4'(x) &= e^{(3x^2-x+3)\cdot\ln(\sin x)} \cdot \Big((3x^2-x+3)\cdot\ln(\sin x)\Big)' \\
&= \Big[\ldots\Big] \cdot \left(\Big(3x^2-x+3\Big)' \cdot \ln(\sin x) + (3x^2-x+3)\cdot\Big(\ln(\sin x)\Big)'\right) \\
&= \Big[\ldots\Big] \cdot \left((6x-1)\cdot\ln(\sin x) + \frac{(3x^2-x+3)\cdot\cos x}{\sin x}\right) \\
&= (\sin x)^{3x^2-x+3} \cdot \Big((6x-1)\cdot\ln(\sin x) + (3x^2-x+3)\cdot\cot x\Big)
\end{aligned}$$

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 11

Es gilt $\cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Ableiten mit der Quotientenregel ergibt

$$\begin{aligned}\Big(\cot(x)\Big)' &= \frac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} \\ &= -\frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)} - \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x).\end{aligned}$$

Wegen $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ folgt zudem

$$\Big(\cot(x)\Big)' = \frac{-\Big(\sin^2(x) + \cos^2(x)\Big)}{\sin^2(x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)}.$$

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 12

Bestimmen der ersten Ableitungen von sinh und cosh:

$$\begin{aligned}\Big(\sinh(x)\Big)' &= \frac{1}{2}\Big(e^x + e^{-x}\Big) = \cosh(x);\\ \Big(\cosh(x)\Big)' &= \frac{1}{2}\Big(e^x - e^{-x}\Big) = \sinh(x).\end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich für die zweiten Ableitungen:

$$\begin{aligned}\Big(\sinh(x)\Big)'' &= \sinh(x);\\ \Big(\cosh(x)\Big)'' &= \cosh(x).\end{aligned}$$

Nullstellen von $\sinh(x)$: $x_0 = 0$.
Nullstellen von $\cosh(x)$: keine.

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 12

Zum Überprüfen des potentiellen Extrempunktes von $\cosh(x)$ bei $x_0 = 0$ wird x_0 in $h(x) = \Big(\cosh(x)\Big)'' = \cosh(x)$ eingesetzt.

$$h(0) = \cosh(0) = \frac{1}{2}\Big(e^0 + e^0\Big) \;=\; 1 \;>\; 0.$$

Hieraus folgt, dass cosh bei $x_0 = 0$ ein Minimum hat.

Zum Überprüfen des potentiellen Wendepunts von $\sinh(x)$ bei $x_0 = 0$ wird x_0 in $h(x) = \Big(\sinh(x)\Big)''' = \cosh(x)$ eingesetzt.

$$h(0) = \cosh(0) = \frac{1}{2}\Big(e^0 + e^0\Big) \;=\; 1 \;\neq\; 0.$$

Hieraus folgt, dass sinh bei $x_0 = 0$ einen Wendepunkt hat.

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 13a

Bestimmen der ersten Ableitungen von f ergibt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{27} \cdot (-3) \cdot \ln 5 \cdot 5^{-3x} \\ f''(x) &= \frac{1}{27} \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot \ln 5 \cdot \ln 5 \cdot 5^{-3x} \\ f'''(x) &= \frac{1}{27} \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot \ln 5 \cdot \ln 5 \cdot \ln 5 \cdot 5^{-3x} \end{aligned}$$

Für die n-te Ableitung kann die folgende Vermutung getroffen werden:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{27} \cdot (-3)^n \cdot (\ln 5)^n \cdot 5^{-3x} = (-1)^n \cdot 3^{n-3} \cdot (\ln 5)^n \cdot 5^{-3x}$$

© 2013 Steven Köhler

Aufgabe 13b

<u>(I) Induktionsanfang</u>

Einsetzen von $n = 1$ in die vermutete Formel ergibt

$$f^{(1)}(x) \;=\; (-1)^1 \cdot 3^{1-3} \cdot (\ln 5)^1 \cdot 5^{-3x} \;=\; -\frac{1}{9} \cdot \ln 5 \cdot 5^{-3x} = f'(x). \quad \checkmark$$

<u>(II) Induktionsschritt</u>

Die Behauptung gelte für ein beliebiges, fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\left(f^{(n)}(x)\right)' &= (-1)^n \cdot 3^{n-3} \cdot (\ln 5)^n \cdot 5^{-3x} \cdot (-3) \cdot \ln 5 \\
&= (-1)^{n+1} \cdot 3^{n-2} \cdot (\ln 5)^{n+1} \cdot 5^{-3x} \\
&= f^{(n+1)}(x)
\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt die Gültigkeit der gefundenen Formel. $\square$

© 2013 Steven Köhler