Tutorium: Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Bonusklausur am 30.06.2014
(Teil 2)

Steven Köhler
mathe@stevenkoehler.de
mathe.stevenkoehler.de

© 2014 Steven Köhler

Das Newtonsche Verfahren

Beschreibung des Verfahrens I

Das Newtonsche Verfahren dient zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Die Funktion f unterliegt dabei den folgenden Bedingungen:

(i) $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$;

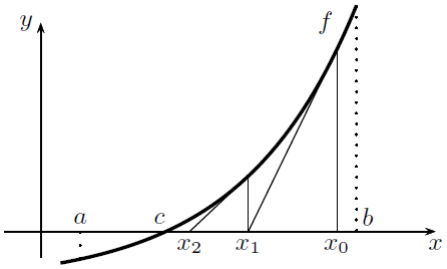
(ii) $f''(x)$ ist auf ganz $[a, b]$ vorhanden und stetig;

(iii) $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Nach (i) gilt also $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$, d.h., (i) sorgt dafür, dass f streng monoton (steigend oder fallend) ist. Bedingung (iii) sichert, dass (nach dem Zwischenwertsatz) überhaupt eine Nullstelle $c \in [a, b]$ vorhanden ist.

Beschreibung des Verfahrens II

Dem Newtonschen Verfahren liegt eine einfache geometrische Idee zugrunde. Man geht von einer ersten Näherung x_0 für die Nullstelle c aus, legt im Punkt $(x_0, f(x_0))$ die Tangente an den Graphen von f und bestimmt den Schnittpunkt x_1 der Tangente mit der x-Achse (siehe Zeichnung).



Beschreibung des Verfahrens III

Indem man $y = 0$ setzt, erhält man aus der Tangentengleichung $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Allgemein erhält man eine Folge von fortlaufend verbesserten Näherungswerten durch:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Aufgabe 1

Bestimme mithilfe des Newton-Verfahrens einen auf vier Nachkommastellen genauen Näherungswert von $\sqrt{3}$. Verwende $x_0 = 3$ als Startwert.

(Zum Vergleich: $\sqrt{3} = 1.732050807568\ldots$)

Die Regeln von de l'Hospital

Die Regeln von de l'Hospital I

Der Typ $\frac{0}{0}$

Es sei I ein Intervall und $x_0 \in I$. Die Funktionen f und g seien für alle $x \in I$ mit $x \neq x_0$ differenzierbar. Es gelte $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, $x \neq x_0$. Ferner sei $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right),$$

falls der rechte Grenzwert existiert bzw. gleich $+\infty$ oder $-\infty$ ist.

Analog für $x \to \infty$.

 © 2014 Steven Köhler

Die Regeln von de l'Hospital II

Der Typ $\frac{\infty}{\infty}$

Es sei I ein Intervall und $x_0 \in I$. Die Funktionen f und g seien für alle $x \in I$ mit $x \neq x_0$ differenzierbar. Es gelte $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, $x \neq x_0$. Ferner sei $\lim\limits_{x \to x_0} \big|f(x)\big| = \lim\limits_{x \to x_0} \big|g(x)\big| = \infty$.

Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right),$$

falls der rechte Grenzwert existiert bzw. gleich $+\infty$ oder $-\infty$ ist.

Analog für $x \to \infty$.

 © 2014 Steven Köhler

Die Regeln von de l'Hospital III

Der Typ $0 \cdot \infty$

Es seien $\lim\limits_{x \to x_0} \big|f(x)\big| = 0$ und $\lim\limits_{x \to x_0} \big|g(x)\big| = \infty$.

Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \Big(f(x) \cdot g(x)\Big) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\right).$$

Die Regeln von de l'Hospital IV

Der Typ $\infty - \infty$

Es sei $\lim\limits_{x \to x_0} \big|f(x)\big| = \lim\limits_{x \to x_0} \big|g(x)\big| = \infty$.

Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \Big(f(x) - g(x)\Big) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}\right).$$

Die Regeln von de l'Hospital V

Die Typen 0^0, 1^∞ und ∞^0

- Typ 0^0: Es seien $\lim\limits_{x\to x_0} \big|f(x)\big| = 0$ und $\lim\limits_{x\to x_0} \big|g(x)\big| = 0$.
- Typ 1^∞: Es seien $\lim\limits_{x\to x_0} \big|f(x)\big| = 1$ und $\lim\limits_{x\to x_0} \big|g(x)\big| = \infty$.
- Typ ∞^0: Es seien $\lim\limits_{x\to x_0} \big|f(x)\big| = \infty$ und $\lim\limits_{x\to x_0} \big|g(x)\big| = 0$.

Dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0}\Big(f(x)^{g(x)}\Big) = \lim_{x\to x_0}\Big(e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\Big) = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\left(g(x)\cdot\ln f(x)\right)}$$

Aufgabe 2

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

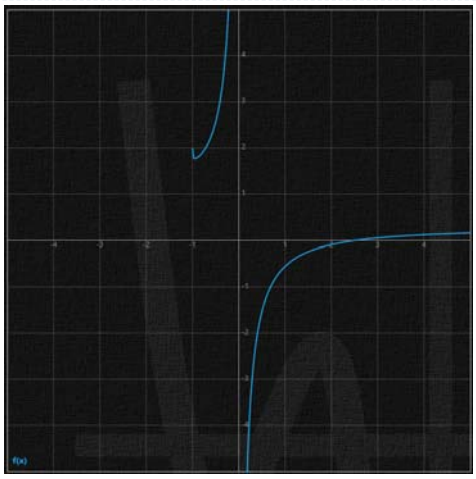
a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(x+1)} - \dfrac{2}{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{x^2-4x+2}{2x+4}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2^x-1}{2\cdot 3^{x+1}}\right)$

Aufgabe 2



Skizze der Funktion $f(x) = \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{2}{x}$

Aufgabe 3

Zeige, dass die Funktion $f(x) = a^x$ (für $a > 1$) schneller wächst als die Funktion $g(x) = x^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$).

Aufgabe 4

Bestimme die Fläche, die von der x-Achse, den beiden Geraden $x = 0$ und $x = 1$ sowie der Funktion $f(x) = \ln x$ eingeschlossen wird.

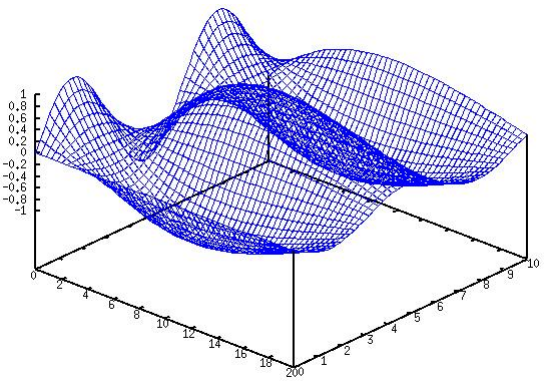
Differenzieren von Funktionen mit mehreren Variablen

Aufgabe 5

Bestimme die partiellen Ableitungen erster Ordnung für die folgende Funktion:

$$f(x, y, z) = \sin\left(x^2 y\right) \cdot \cos\left(y\sqrt{z}\right) \cdot e^{xz}$$

Einführung



Beispielfunktion: $f(x, y) = \cos\left(\sqrt{x}\right) \cdot \sin\left(y\right)$

Bestimmung des Gradienten I

Zunächst werden die stationären Stellen der Funktion bestimmt: Dazu wird der Gradient $\operatorname{grad}\Big(f\big(x_1,\ldots,x_n\big)\Big)$ gebildet und gleich 0 gesetzt.

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\Big(f\big(x_1,\ldots,x_n\big)\Big) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\\ &= \Big(0,\ldots,0\Big)\end{aligned}$$

Bestimmung des Gradienten II

Dies lässt sich auch als Gleichungssystem schreiben:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\ldots) &= 0\\ &\vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\ldots) &= 0.\end{aligned}$$

Die Lösungen $x^{(i)}$ dieses Gleichungssystem sind die gesuchten stationären Stellen.

Aufstellen der Hesse-Matrix I

Anschließend werden die Hesse-Matrizen H_i wie folgt erstellt:

$$H_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1^2}\left(x^{(i)}\right) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n}\left(x^{(i)}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_1}\left(x^{(i)}\right) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n^2}\left(x^{(i)}\right) \end{bmatrix}$$

Aufstellen der Hesse-Matrix II

Abschließend muss die *Definitheit* der Hesse-Matrizen bestimmt werden, um die Art des Extremums zu ermitteln. Dazu werden zunächst die Abschnittsdeterminanten $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ bestimmt:

- Sind alle $\Delta_i > 0$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$), so ist die Matrix *positiv definit* und es liegt ein *Minimum* vor.
- Haben die Δ_i ein alternierendes Vorzeichen, beginnend mit "-", so ist die Matrix *negativ definit* und es liegt ein *Maximum* vor. Formal ausgedrückt: $\Delta_{2m+1} < 0$ und $\Delta_{2m} > 0$ für $m \in \mathbb{N}$.

Aufstellen der Hesse-Matrix III

Für Funktionen mit 2 Variablen ergibt sich der folgende Spezialfall:

- Gilt $\Delta_2 = \det H < 0$, so ist die Matrix indefinit und es liegt kein Extremum vor.
- Für $\Delta_2 = \det H > 0$ gilt:
  - Ist $\Delta_1 = f_{xx} < 0$, so ist die Matrix negativ definit; es liegt ein Maximum vor.
  - Ist $\Delta_1 = f_{xx} > 0$, so ist die Matrix positiv definit; es liegt ein Minimum vor.

Aufstellen der Hesse-Matrix IV

Ist die Matrix weder positiv noch negativ definit, so kann (mit Ausnahme von 2×2 - Matrizen) ohne weitere Untersuchung keine genaue Aussage über die Definitheit getroffen werden.

Dazu wird z.B. die Bilinearform b_A benutzt:

$$b_A(x, y) = x \cdot A \cdot y^T$$

Eine Alternative stellt die *quadratische Form* dar:

$$Q_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x \cdot A \cdot x^T$$

Gibt es nun Vektoren x und y, so dass $b_A(x, x) = Q_A(x) > 0$ und $b_A(y, y) = Q_A(y) < 0$, so ist die Matrix *indefinit* und es liegt *kein Extremum* vor.

Aufgabe 6

Bestimme die Extremstellen der folgenden Funktionen

a) $f(x,y) = -6xy + x^2 + 2y^3$

b) $f(x,y) = -x^2 + 2x + xy - 2y^2$

c) $f(x,y,z) = -2x^2 - 3y^2 - z^2 + 2xz + 2x + 8y$

Aufgabe 7

Bestimme die Extremstellen der Funktion

$$f(x,y) = -6xy + x^2 + 2y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$x + y - 2 = 0.$$

Aufgabe 8

Entscheide, ob die folgende Matrix H positiv definit, negativ definit oder indefinit ist. Begründe deine Antwort!

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

© 2014 Steven Köhler