Tutorium:
Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Bonusklausur am 14.05.2018
(Teil 2, Lösungen)

9. Mai 2018

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1 I

Um zu entscheiden, ob f eine lineare Abbildung ist, müssen zwei Dinge geprüft werden:

- f ist additiv:

$$\begin{aligned} f(x+x', y+y', z+z') &= \begin{pmatrix} 2(x+x') + (y+y') - (z+z') \\ -(x+x') + 2(z+z') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2x+y-z) + (2x'+y'-z') \\ (-x+2z) + (-x'+2z') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x+y-z \\ -x+2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x'+y'-z' \\ -x'+2z' \end{pmatrix} \\ &= f(x,y,z) + f(x',y',z') \quad \checkmark \end{aligned}$$

Aufgabe 1 II

- f ist homogen:

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) &= \begin{pmatrix} 2\lambda x + \lambda y - \lambda z \\ -\lambda x + 2\lambda z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(2x+y-z) \\ \lambda(-x+2z) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 2x+y-z \\ -x+2z \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(x,y,z) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Da f sowohl homogen als auch additiv ist, ist f eine lineare Abbildung.

Aufgabe 2

Zunächst muss eine Darstellung des Vektors v durch die Basisvektoren b_1, b_2 gefunden werden. Es gilt:

$$v = 5b_1 + 7b_2.$$

Nun kann $f(v)$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned} f(v) &= f(5b_1 + 7b_2) \\ &= 5 \cdot f(b_1) + 7 \cdot f(b_2) \\ &= 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 45 \\ 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 I

Zunächst müssen die Einheitsvektoren als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden:

$$\begin{aligned} e_1 &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ e_2 &= \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2. \end{aligned}$$

Bestimmen der Koeffizienten liefert

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1 \quad \text{und} \quad \mu_1 = 0,\ \mu_2 = -\frac{1}{2}.$$

Aufgabe 3 II

Es folgt:

$$f(e_1) = 1 \cdot f(b_1) + 1 \cdot f(b_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = 0 \cdot f(b_1) - \frac{1}{2} \cdot f(b_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Die Abbildungsmatrix A erhält man, indem man die Bilder der Einheitsvektoren als Spalten der Abbildungsmatrix verwendet:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ 5 & 0 \\ 7 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 4

a) Anwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus ergibt die folgende inverse Matrix:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es gilt $A \cdot A^{-1} = E$.

b) Im Laufe des Verfahrens wird die folgende Matrix erreicht, die nicht weiter zur Einheitsmatrix umgeformt werden kann:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 5a

Nach der Regel von Sarrus ergibt sich für det(A):

$$\begin{aligned}\det(A) &= (2 \cdot 3 \cdot 5) + (4 \cdot 7 \cdot 0) + (6 \cdot 1 \cdot (-1)) \\ &\quad - (6 \cdot 3 \cdot 0) - (2 \cdot 7 \cdot (-1)) - (4 \cdot 1 \cdot 5) \\ &= 30 + 0 - 6 - 0 + 14 - 20 \\ &= 18\end{aligned}$$

Aufgabe 5b

Mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz kann det(A) bspw. nach der ersten Spalte entwickelt werden. Es folgt

$$\begin{aligned}\det(A) &= 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \\ &= 2 \cdot (3 \cdot 5 - 7 \cdot (-1)) - 1 \cdot (4 \cdot 5 - 6 \cdot (-1)) + 0 \cdot (4 \cdot 7 - 6 \cdot 3) \\ &= 44 - 26 + 0 \\ &= 18\end{aligned}$$

Aufgabe 5c I

Überführen in Zeilenstufenform:

$$
\begin{array}{rrr|l}
2 & 4 & 6 & \mathrm{I} \cdot \frac{1}{2} \\
1 & 3 & 7 & \\
0 & -1 & 5 & \\
\hline
1 & 2 & 3 & \\
1 & 3 & 7 & \mathrm{II} - \mathrm{I} \\
0 & -1 & 5 & \\
\hline
1 & 2 & 3 & \\
0 & 1 & 4 & \\
0 & -1 & 5 & \mathrm{III} + \mathrm{II} \\
\hline
1 & 2 & 3 & \\
0 & 1 & 4 & \\
0 & 0 & 9 &
\end{array}
$$

Aufgabe 5c II

Die Determinate der unteren Matrix B kann als Produkt der Hauptdiagonalenelemente bestimmt werden:

$$\det(B) = 1 \cdot 1 \cdot 9 = 9.$$

Die untere Matrix B ist aus der anfänglichen Matrix A hervorgegangen, indem insbesondere die erste Zeile mit $\frac{1}{2}$ multipliziert wurde. Es gilt folglich

$$\det(B) = \frac{1}{2} \cdot \det(A),$$

woraus direkt $\det(A) = 18$ folgt.

Aufgabe 6a, c-e

a) **Falsch**.
Wegen $\dim(Z(A)) = 2$ gibt es in Zeilenstufenform 2 Nicht-Nullzeilen und 2 Nullzeilen und somit 2 führende und 2 freie Variablen. Verwendung von Parametern s und t für die freien Variablen resultiert in unendlich viele Lösungen des Gleichungssystems.

c) **Falsch**.
Wegen $\dim(Z(A)) = 2 < 4$ besitzt die Matrix in Zeilenstufenform 2 Nullzeilen. Eine Matrix ist Zeilenstufenform ist automatisch eine Dreiecksmatrix. Berechnen der Determinanten als Produkt der Hauptdiagonalenelemente ergibt folglich $\det(A) = 0$.

d) **Wahr**.
Aufgrund der Nullzeilen in Zeilenstufenform kann die Matrix nicht in die Einheitsmatrix überführt werden.

e) **Wahr**.
Es gilt $\dim(S(A)) = 2$. Die 4 Spaltenvektoren $s_1, \dots, s_4 \in S(A)$ können folglich nicht linear unabhängig sein.

Aufgabe 6b

b) **Wahr**.
Für eine $n \times m$ Matrix M gelten stets folgende Eigenschaften:

- $\dim(Z(M)) + \dim(N(M)) = n$
- $\dim(S(M)) + \dim(N(M^T)) = m$
- $\dim(Z(M)) = \dim(S(M))$

Für die Matrix A folgt

$$\begin{aligned} m = 4 &= \dim(S(A)) + \dim(N(A^T)) \\ &= \dim(Z(A)) + \dim(N(A^T)) \\ &= 2 + \dim(N(A^T)). \end{aligned}$$

Hieraus folgt unmittelbar $\dim(N(A^T)) = 2$.