Tutorium:
Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Abschlussklausur am 18.07.2018
(Teil 2, Lösungen)

13. Juli 2018

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 1a

Es ergeben sich die folgenden Ergebnisse:

$$z_1 + z_2 = 8 - 2i,$$

$$z_1 - z_2 = 4 + 4i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = 15 - 16i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{9}{13} + \frac{20}{13}i$$

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 1b

Umformen von z_1 und z_2 ergibt:

$$z_1 = 3 - 3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right)$$

$$z_2 = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = 5\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \cdot 5\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Als Lösung ergibt sich:

$$z_1^3 \cdot z_2 = \left(3\sqrt{2}\right)^3 \cdot 5 \cdot \left(\cos\left(\frac{43}{8}\pi\right) + i\sin\left(\frac{43}{8}\pi\right)\right)$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \left(3 - 5\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) + i\left(3 + 5\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 1c

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2i & 1+i \\ 2-i & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3+i & 1 \\ i & 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+7i & 4i \\ 7+4i & 7+4i \end{bmatrix}$$

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 2

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1))}{r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2))}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1)) \cdot (\cos(\varphi_2) - i \cdot \sin(\varphi_2))}{(\cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2)) \cdot (\cos(\varphi_2) - i \cdot \sin(\varphi_2))}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) - \cos(\varphi_1) \cdot i \cdot \sin(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) - i \cdot \sin(\varphi_1) \cdot i \cdot \sin(\varphi_2)}{\cos^2(\varphi_2) - (i \cdot \sin(\varphi_2))^2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\overbrace{(\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2))}^{\overset{(\star)}{=} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} + i \cdot \overbrace{(\sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) - \cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2))}^{\overset{(\star)}{=} \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}}{\underbrace{\cos^2(\varphi_2) + \sin^2(\varphi_2)}_{=1}}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

An den Stellen $(\star)$ wurden die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus verwendet.

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 3 I

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} O_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(2\left(\frac{i}{n}\right)^2 + \left(\frac{i}{n}\right) \right) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{i}{n}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right) \right) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i \right)
\end{aligned}
$$

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 3 II

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^3 + \ldots}{6n^3} + \frac{n^2 + \ldots}{2n^2} \right)$$

$$= \frac{4}{6} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

Bestätigung mit dem bestimmten Integral:

$$\int_0^1 \left(2x^2 + x\right)\, dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{4}{6} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 4a

$$
\begin{aligned}
\int x \cdot 3^x \, dx &= x \cdot 3^x \cdot \frac{1}{\ln 3} - \int 1 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} \, dx \\
&= x \cdot 3^x \cdot \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} \int 3^x \, dx \\
&= x \cdot 3^x \cdot \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{\ln 3} \cdot 3^x \\
&= \frac{3^x}{\ln 3} \cdot \left(x - \frac{1}{\ln 3} \right)
\end{aligned}
$$

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 4b

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \cdot \cos x \; dx &= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \; dx \\
&= x^2 \sin x - 2 \left(-x \cos x + \int \cos x \; dx \right) \\
&= x^2 \sin x - 2 \Big(-x \cos x + \sin x \Big) \\
&= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin 5
\end{aligned}
$$

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 4c

Partielle Integration ergibt:

$$\int \sin x \cdot \cos x \; dx = \sin x \cdot \sin x - \int \cos x \cdot \sin x \; dx.$$

Anschließendes Umstellen ergibt:

$$2 \int \sin x \cdot \cos x \; dx = \sin x \cdot \sin x$$

$$\int \sin x \cdot \cos x \; dx = \frac{1}{2} \sin^2 x.$$

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 5a

$$
\begin{aligned}
\int e^{\sqrt{5x-2}}\,dx &= \frac{2}{5}\int e^t \cdot t\,dt \\
&= \frac{2}{5}\left(e^t \cdot t - \int e^t\,dt\right) \\
&= \frac{2}{5}\left(e^t \cdot t - e^t\right) \\
&= \frac{2}{5}\left(e^{\sqrt{5x-2}} \cdot \sqrt{5x-2} - e^{\sqrt{5x-2}}\right)
\end{aligned}
$$

Es wurde mit $t = \sqrt{5x-2}$ substituiert. Symbolisches Rechnen ergibt in diesem Fall $dx = \frac{2}{5}t\,dt$.

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 5b

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \sin\left(2x^3\right)\, dx &= \frac{1}{6}\int \sin t\ dt \\ &= -\frac{1}{6}\cos t \\ &= -\frac{1}{6}\cos\left(2x^3\right)\end{aligned}$$

Es wurde mit $t = 2x^3$ substituiert. Symbolisches Rechnen ergibt in diesem Fall $x^2\ dx = \frac{1}{6}\ dt$.

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 5c

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx &= \int \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2x}\,dt \\ &= \int \frac{1}{2\cdot\sqrt{t}}\,dt \\ &= \sqrt{t} \\ &= \sqrt{x^2+1}\end{aligned}$$

Es wurde mit $t = x^2 + 1$ substituiert. Symbolisches Rechnen ergibt in diesem Fall $dx = \frac{1}{2x}\,dt$.

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 5d

$$\begin{aligned}\int \sin x \cdot \cos x \; dx &= \int t \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} \; dt \\ &= \int t \; dt \\ &= \frac{1}{2} t^2 \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 x\end{aligned}$$

Es wurde mit $t = \sin x$ substituiert. Symbolisches Rechnen ergibt in diesem Fall $dx = \frac{1}{\cos x} \; dt$.

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 6

$$\int \frac{\arctan x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\arctan^2 x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x}\,dx = \ln\left|\arcsin x\right|$$

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 7

$$\begin{aligned}\int e^{3x-5}\ dx &= \frac{1}{3}\int 3e^{3x-5}\ dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x-5}\end{aligned}$$

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 8

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin(x)\ dx &= \Big[-\cos(x)\Big]_0^{2\pi} \\ &= -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) \\ &= 0\end{aligned}$$

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 9

a) Ersetzen der oberen Grenze durch b und Ausrechnen des Grenzwerts:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-x^{-1}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-b^{-1}-\left(-1^{-1}\right)\right) = 1$$

Die Größe der eingeschlossenen Fläche ist 1.

b) Ersetzen der unteren Grenze durch a und Ausrechnen des Grenzwerts:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0}\left(2\sqrt{1}-2\sqrt{a}\right) = 2$$

Die Größe der eingeschlossenen Fläche ist 2.

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 10

Der Grad des Zählerpolynoms ist kleiner als der Grad des Nennerpolynoms. Eine Polynomdivision ist nicht notwendig.

Partialbruchzerlegung für $\frac{x+2}{x^2-1}$:

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \ldots = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{3}{2}}{x-1}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2-1}\,dx &= \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{3}{2}}{x-1}\right)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left|x+1\right| + \frac{3}{2}\ln\left|x-1\right|\end{aligned}$$

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 11

Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f(x,y,z) = \sin\left(x^2 y\right) \cdot \cos\left(y\sqrt{z}\right) \cdot e^{xz}$$

Bestimmen der partiellen Ableitungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y,z\right) = f_x = \cos\left(x^{\mathbf{2}} y\right) \cdot 2xy \cdot \cos\left(y\sqrt{z}\right) \cdot e^{xz} + \sin\left(x^{\mathbf{2}} y\right) \cos\left(y\sqrt{z}\right) \cdot e^{xz} \cdot z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y,z\right) = f_y = \cos\left(x^{\mathbf{2}} y\right) \cdot x^{\mathbf{2}} \cdot \cos\left(y\sqrt{z}\right) \cdot e^{xz} - \sin\left(x^{\mathbf{2}} y\right) \cdot \sin\left(y\sqrt{z}\right) \cdot \sqrt{z} \cdot e^{xz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(x,y,z\right) = f_z = -\sin\left(x^{\mathbf{2}} y\right) \cdot \sin\left(y\sqrt{z}\right) \cdot \frac{y}{2\sqrt{z}} \cdot e^{xz} + \sin\left(x^{\mathbf{2}} y\right) \cdot \cos\left(y\sqrt{z}\right) \cdot e^{xz} \cdot x$$

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 12a I

Bestimmen der partiellen Ableitungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big(x, y\Big) = f_x = -6y + 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big(x, y\Big) = f_y = -6x + 6y^2$$

Gleichsetzen des Gradienten mit 0:

$$\text{grad}\Big(f(x, y)\Big) = \Big(f_x, f_y\Big) = \Big(-6y + 2x, -6x + 6y^2\Big) = \Big(0, 0\Big).$$

Lösen des resultierenden Gleichungssystems ergibt die beiden stationären Stellen

$$S_1(0, 0) \qquad \text{und} \qquad S_2(9, 3).$$

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 12a II

Aufstellen der Hesse-Matrix:

$$H_i = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 12y_i \end{bmatrix}.$$

Bestimmen der Abschnittsdeterminanten:

- Für S_1 ergibt sich $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = -36$. Die Matrix H_1 ist indefinit. Es liegt kein Extrempunkt vor.
- Für S_2 ergibt sich $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 36$. Die Matrix H_2 ist positiv definit. Es liegt ein Minimum vor.

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 12b I

Bestimmen der partiellen Ableitungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big(x, y\Big) = f_x = -2x + 2 + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big(x, y\Big) = f_y = x - 4y$$

Gleichsetzen des Gradienten mit 0:

$$\operatorname{grad}\Big(f(x, y)\Big) = \Big(f_x, f_y\Big) = \Big(-2x + 2 + y, x - 4y\Big) = \Big(0, 0\Big).$$

Lösen des resultierenden Gleichungssystems ergibt die einzige stationäre Stelle

$$S_1\left(\frac{8}{7}, \frac{2}{7}\right).$$

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 12b II

Aufstellen der Hesse-Matrix:

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen der Abschnittsdeterminanten:

$$\Delta_1 = -2$$
$$\Delta_2 = 7$$

Wegen $\Delta_1 < 0$ und $\Delta_2 > 0$ ist die Matrix negativ definit. Es handelt sich folglich um ein Maximum.

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 12c I

Bestimmen der partiellen Ableitungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}\Big(x,y,z\Big) &= f_x = -4x+2z+2 \\
\frac{\partial f}{\partial y}\Big(x,y,z\Big) &= f_y = -6y+8 \\
\frac{\partial f}{\partial z}\Big(x,y,z\Big) &= f_z = -2z+2x
\end{aligned}$$

Gleichsetzen des Gradienten mit 0:

$$\operatorname{grad}\Big(f(x,y,z)\Big) = \Big(f_x, f_y, f_z\Big) = \Big(0,0,0\Big).$$

Als einzige stationäre Stelle ergibt sich $S\big(1,\frac{4}{3},1\big)$.

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 12c II

Aufstellen der Hesse-Matrix und bestimmen der Abschnittsdeterminanten:

$$H = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \Delta_1 &= -4 \\ \Delta_2 &= 24 \\ \Delta_3 &= -24 \end{aligned}$$

Wegen $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ und $\Delta_3 < 0$ ist H negativ definit. Es handelt sich folglich um ein Maximum.

© 2018 Steven Köhler

Aufgabe 13

Zunächst wird der Gradient aufgestellt:

$$\operatorname{grad}\big(f(x,y)\big) = \big(f_x, f_y\big) = \big(y+1, x\big).$$

Einsetzen des Punkts $(2,3)$ in den Gradienten ergibt:

$$\operatorname{grad}\big(f(x,y)\big)(2,3) = (4,2).$$

Normieren des Vektors $v = (1,1)$:

$$v' = \frac{v}{|v|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Berechnen der Richtungsableitung:

$$D_v f(2,3) = (4,2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3 \cdot \sqrt{2}.$$

© 2018 Steven Köhler