Tutorium: Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Bonusklausur am 13.05.2019 (Teil 1)

30. April 2019

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Matrizen

Definition I

Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung (Tabelle) von Elementen, mit denen man in bestimmter Weise rechnen kann.

Matrizen sind ein Schlüsselkonzept der linearen Algebra und tauchen in vielen Gebieten der Mathematik auf. Matrizen stellen Zusammenhänge, in denen Linearkombinationen eine Rolle spielen, übersichtlich dar und erleichtern damit Rechen- und Gedankenvorgänge. Sie werden insbesondere dazu benutzt, lineare Abbildungen darzustellen und lineare Gleichungssysteme zu beschreiben.

Definition II

Matrizen werden dargestellt durch eine tabellarische Auflistung der Werte, die durch ein großes Klammerpaar umgeben ist. Die Form der Klammern ist dabei nicht fest vorgegeben, typisch sind aber runde oder eckige Klammern.

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Addition von Matrizen

Matrizen werden komponentenweise addiert.

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}$$

Subtraktion von Matrizen

Matrizen werden komponentenweise subtrahiert.

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} & a_{33} - b_{33} \end{bmatrix}$$

Skalare Multiplikation

Eine Matrix kann mit einem konstanten Faktor $\lambda \in K$ multipliziert werden. Den Wert λ nennt man ein Skalar.

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{bmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen I

Neben der skalaren Multiplikation gibt es noch eine weitere Multiplikation für Matrizen. Dabei werden 2 Matrizen miteinander multipliziert. Die folgende Formel zeigt dies exemplarisch für 3×3 - Matrizen:

$$\begin{aligned} & A \cdot B \\ = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Multiplikation von Matrizen II

Die Einträge der Ergebnismatrix sind die Skalarprodukte der Zeilenvektoren der Matrix A mit den Spaltenvektoren der Matrix B.

Hieraus lässt sich leicht eine Aussage über eine essentielle Voraussetzung der Matrizenmultiplikation treffen.

Damit man zwei Matrizen multiplizieren kann, müssen die Anzahl der Spalten der ersten Matrix und die Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix übereinstimmen.

Multiplikation von Matrizen III

Gegeben seien zwei Matrizen $A \in K^{m \times n}$ und $B \in K^{n \times p}$. Das Produkt C der beiden Matrizen A und B ist eine $m \times p$ - Matrix und lässt sich allgemein durch die folgende Formel darstellen:

$$\begin{aligned} C &= A \cdot B \\ &= \left[a_{ij}\right] \cdot \left[b_{ij}\right] \\ &= \left[c_{ij}\right] \text{ mit } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \end{aligned}$$

Falksches Schema I

Das *Falksche Schema* (1951 von Sigurd Falk vorgeschlagen) ist eine einfache Methode, die Matrizenmultiplikation übersichtlicher darzustellen.

Dazu werden die Matrizen A und B sowie deren Produkt C in eine bestimmte tabellarische Form gebracht, die vor allem eine optische Hilfe bietet.

Falksches Schema II

Exemplarisch seien zwei Matrizen $A \in K^{3\times 3}$ und $B \in K^{3\times 3}$ gegeben. Darstellung der Matrizenmultiplikation mithilfe des Falkschen Schemas:

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} (B) \\
\hline
(A) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} (C)
\end{array}$$

Die Werte für c_{ij} berechnen sich wie zuvor durch $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}$.

Elementare Zeilenumformungen

Man kann Matrizen durch *elementare Zeilenumformungen* in eine andere Matrix überführen. Diese Umformungen sind:

- Vertauschen von zwei Zeilen;
- Multiplikation einer Zeile mit einer von Null verschiedenen Konstanten;
- Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Diese Operationen können kombiniert und beliebig oft wiederholt werden.

Elementare Spaltenumformungen I

Ebenso wie durch elementare Zeilenumformungen kann man eine Matrix durch *elementare Spaltenumformungen* in eine andere Matrix überführen. Diese Umformungen sind:

- Vertauschen von zwei Spalten;
- Multiplikation einer Spalte mit einer von Null verschiedenen Konstanten;
- Addition des Vielfachen einer Spalte zu einer anderen Spalte.

Diese Operationen können ebenfalls kombiniert und beliebig oft wiederholt werden.

Elementare Spaltenumformungen II

Generell sollten elementare Zeilen- und Spaltenumformungen nicht vermischt werden, da dies meist mehr Chaos als Nutzen bringt.

Wir werden uns im Folgenden ausschließlich mit elementaren Zeilenumformungen beschäftigen.

Sollten einmal Umformungen der Spalten notwendig sein, werden wir die zugehörige Matrix zunächst transponieren und anschließend die Zeilen der transponierten Matrix umformen.

Zeilenstufenform

Zeilenstufenform I

Durch elementare Zeilenumformungen kann man jede Matrix in die sogenannte *Zeilenstufenform* bringen. Diese erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Alle Zeilen, die nur Nullen enthalten, stehen in der Matrix ganz unten.
- Wenn eine Zeile nicht nur aus Nullen besteht, so ist die erste von Null verschiedene Zahl eine Eins. Sie wird als *führende Eins* bezeichnet.
- In zwei aufeinanderfolgenden Zeilen, die von Null verschiedene Elemente besitzen, steht die führende Eins in der unteren Zeile stets weiter rechts als in der oberen Zeile.

Zeilenstufenform II

Besitzt die Matrix Zeilenstufenform und gilt zusätzlich noch die folgende Eigenschaft, so liegt die Matrix in *reduzierter Zeilenstufenform* vor.

- Eine Spalte, die eine führende Eins enthält, hat keine weiteren von Null verschiedenen Einträge.

Zeilenstufenform III

Beispiel:

Überführe die nachfolgende Matrix A in Zeilenstufenform!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Zeilenstufenform IV

Zunächst wird die 1. Zeile mit $\frac{1}{2}$ multipliziert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Anschließend wird das (-3)-fache der 1. Zeile zur 2. Zeile addiert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Abschließend wird die 2. Zeile mit $-\frac{1}{7}$ multipliziert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gauß-Jordan-Algorithmus I

1. Bestimme die am weitesten links stehende Spalte der Matrix, die von Null verschiedene Werte enthält.
2. Ist der oberste Eintrag der gefundenen Spalte eine Null, so vertausche die oberste Zeile mit einer geeigneten Zeile, die in dieser Spalte keine Null enthält.
3. In der betrachteten Spalte ist nun der oberste Eintrag ein von Null verschiedenes Körperelement a. Multipliziere die erste Zeile der Matrix mit dem Inversen a^{-1} und erzeuge so eine führende Eins.

Gauß-Jordan-Algorithmus II

4. Addiere das jeweils passende Vielfache der aktuellen Zeile zu den anderen Zeilen, so dass alle Einträge unterhalb der führenden Eins der aktuellen Zeile zu Null werden.
5. Wende die Schritte 1-4 auf die Matrix an, die man durch Streichen der aktuellen Zeile erhält und iteriere das Verfahren bis die Matrix Zeilenstufenform hat.
6. Mit der letzten nicht verschwindenden Zeile beginnend, addiere geeignete Vielfache der unteren Zeilen zu den darüber liegenden Zeilen, um über den führenden Einsen Nullen zu erzeugen.

Aufgabe 1

Überführe die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ in Zeilenstufenform sowie in reduzierte Zeilenstufenform!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2

Überführe die folgende Matrix $B \in \mathbb{Z}_5^{2\times 3}$ in Zeilenstufenform.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3

Überführe die folgende Matrix $C \in \mathbb{R}^{7\times 10}$ in Zeilenstufenform.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -1 & 7 & 3 & -17 & -85 & -72 & -136 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 5 & 2 & -11 & -54 & -49 & -92 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 3 & 1 & -8 & -39 & -31 & -59 \\ 2 & -6 & -16 & 0 & 21 & 9 & -52 & -260 & -216 & -412 \\ -1 & 3 & 8 & 0 & -10 & -2 & 26 & 121 & 102 & 185 \\ -3 & 7 & 16 & 2 & -26 & -13 & 60 & 307 & 261 & 507 \\ -1 & 4 & 12 & -1 & -10 & -7 & 28 & 152 & 114 & 224 \end{bmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

Definition

Als *lineare Gleichungssysteme* bezeichnet man in der linearen Algebra Gleichungssysteme der folgenden Art:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem besteht dabei aus m Gleichungen mit n Unbekannten.

Darstellungsformen I

Es existieren verschiedene Darstellungsformen für lineare Gleichungssysteme:

- die *explizite Form*;
- die *Matrixform*;
- die *Spaltenform* (oder auch *Vektorform*).

Lineare Gleichungssysteme

Darstellungsformen II

Die explizite Form:

Bei dieser Form wird das Gleichungssystem als eine Menge von m separaten Gleichungen mit n Unbekannten angegeben.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Darstellungsformen III

Die Matrixform:

Bei dieser Form wird das Gleichungssystem als Produkt einer Koeffizientenmatrix A, einem Spaltenvektor x mit den Unbekannten sowie einem Lösungsvektor b angegeben.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Die Gleichung lässt sich auch in der folgenden kompakten Form schreiben:

$$Ax = b.$$

Darstellungsformen IV

Die Spaltenform:

Bei dieser Form wird das Gleichungssystem als Summe der Produkte der Unbekannten mit den Spaltenvektoren der Matrix A sowie einem Lösungsvektor b angegeben:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Verwendet man für die Spalten die Schreibweise a_i, so ergibt sich die folgende kompakte Schreibweise:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = b.$$

Gauß-Verfahren I

Das *Gauß-Verfahren* bietet eine einfache Möglichkeit, lineare Gleichungssysteme zu lösen. Es basiert auf der Matrixform des Gleichungssystems.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Gauß-Verfahren II

Für die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ sind nur die Koeffizientenmatrix A sowie der Lösungsvektor b von Interesse.

Diese fasst man in der sogenannten *erweiterten Koeffizientenmatrix* zusammen:

$$\left[A \middle| b\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Gauß-Verfahren III

Das Gauß-Verfahren basiert auf der Grundidee, zunächst die erweiterte Koeffizientenmatrix durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform zu überführen und anschließend durch Rückwärtseinsetzen schrittweise die Lösung zu bestimmen.

Wichtig: Durch elementare Spaltenumformungen kann sehr leicht die Lösungsmenge des Gleichungssystems verändert werden. Aus diesem Grund sind diese beim Lösen linearer Gleichungssysteme mit dem Gauß-(Jordan-)Verfahren **verboten**!

Gauß-Verfahren VI

Aufgabe:

Löse das folgende Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren!

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 22 \\ 3x_1 - 2x_2 &= -7 \end{aligned}$$

Lösung:

Zunächst wird die erweiterte Koeffizientenmatrix erstellt und schrittweise in Zeilenstufenform gebracht.

$$\left[A\middle|b\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 22 \\ 3 & -2 & -7 \end{array}\right]$$

Gauß-Verfahren V

Multiplikation der ersten Zeile mit $\frac{1}{2}$ ergibt

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 11 \\ 3 & -2 & -7 \end{array}\right].$$

Anschließend wird durch Addition des (-3)-fachen der ersten Zeile zur zweiten die erste Spalte in die richtige Form gebracht:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 11 \\ 0 & -8 & -40 \end{array}\right].$$

Multiplikation der zweiten Zeile mit $-\frac{1}{8}$ stellt die gewünschte Zeilenstufenform her:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right].$$

Gauß-Verfahren VI

Zur Erinnerung: Die Darstellung durch die erweiterte Koeffizientenmatrix ist lediglich eine andere Schreibweise für das Gleichungssystem, das nach den Umformungen wie folgt lautet:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 11 \\ x_2 &= 5. \end{aligned}$$

Nun löst man die Gleichungen von unten nach oben auf. $x_2 = 5$ liegt bereits in der gewünschten Form vor. Setzt man x_2 nun in die obere Gleichung ein, so ergibt sich

$$x_1 + 2 \cdot 5 = 11,$$

woraus sofort $x_1 = 1$ folgt.

Gauß-Verfahren VII

Die einzige Lösung des Gleichungssystems lautet also

$$x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = 5.$$

Man kann dies leicht durch Einsetzen in die Ausgangsgleichungen überprüfen.

Gauß-Jordan-Verfahren I

Beim Gauß-Jordan-Verfahren wird die Matrix in *reduzierte Zeilenstufenform* gebracht, d.h., außer den führenden Einsen enthält die Matrix A in der erweiterten Koeffizientenmatrix $\left[A|b\right]$ nur Nullen.

Wir hatten beim Gauß-Verfahren die erweiterte Koeffizientenmatrix bereits in Zeilenstufenform gebracht.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right].$$

Gauß-Jordan-Verfahren II

Man muss also nur noch durch Addition des (-2)-fachen der zweiten Zeile zur ersten die zweite Spalte in die richtige Form bringen:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right].$$

Hier kann man nun die Lösungen für x_1 und x_2 ohne weiteres Rechnen direkt ablesen. Es folgt wie erwartet

$$x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = 5.$$

Anzahl der Lösungen I

Ein Gleichungssystem kann keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen besitzen.

Anzahl der Lösungen II

Eine Lösung:

Den Fall genau einer Lösung haben wir bereits bei unserem Beispiel gesehen.

Dieser Fall liegt immer genau dann vor, wenn in der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A|b]$ die Matrix A nach dem Überführen in Zeilenstufenform genauso viele vom Nullvektor verschiedene Zeilen besitzt wie das Gleichungssystem Variablen hat.

Anzahl der Lösungen III

Keine Lösung:

Es ist möglich, dass ein Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

Dies ist genau dann der Fall, wenn in der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A|b]$ (nach dem Überführen in Zeilenstufenform) eine Zeile der folgenden Art auftritt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & b \end{array}\right] \quad (\text{mit } b \neq 0).$$

Anzahl der Lösungen IV

Dies würde bedeuten, dass

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = b \ (\neq 0)$$

gilt, was einen Widerspruch darstellt. Das Gleichungssystem kann folglich keine Lösung besitzen.

Anzahl der Lösungen V

Unendlich viele Lösungen:

Es ist zudem möglich, dass ein Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt.

Dieser Fall liegt immer genau dann vor, wenn in der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A|b]$ (nach dem Überführen in Zeilenstufenform) die Matrix A weniger vom Nullvektor verschiedene Zeilen besitzt als das Gleichungssystem Variablen hat.

Mit anderen Worten: „Es gibt mehr Variablen als Gleichungen“.

Anzahl der Lösungen VI

Aufgabe:

Löse das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 22 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= -7 \end{aligned}$$

Lösung:

Auch in diesem Fall wird zunächst die erweiterte Koeffizientenmatrix erstellt und schrittweise in Zeilenstufenform gebracht.

$$\left[A \middle| b\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 22 \\ 3 & -2 & -1 & -7 \end{array}\right]$$

Anzahl der Lösungen VII

Multiplikation der ersten Zeile mit $\frac{1}{2}$ ergibt

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 11 \\ 3 & -2 & -1 & -7 \end{array}\right].$$

Anschließend wird durch Addition des (-3)-fachen der ersten zur zweiten Zeile die erste Spalte in die richtige Form gebracht:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 11 \\ 0 & -8 & -\frac{5}{2} & -40 \end{array}\right].$$

Anzahl der Lösungen VIII

Multiplikation der zweiten Zeile mit $-\frac{1}{8}$ stellt die gewünschte Zeilenstufenform her:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 11 \\ 0 & 1 & \frac{5}{16} & 5 \end{array}\right].$$

Die Spalten mit den führenden Einsen repräsentieren die *führenden Variablen*, die restlichen Spalten stellen die *freien Variablen* dar.

Anzahl der Lösungen IX

Um die Lösung zu erhalten, weist man den freien Variablen Parameter zu. In unserem Beispiel ist

$$x_3 = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

die einzige freie Variable.

Die führenden Variablen rechnet man wie gewohnt durch Rückwärtseinsetzen aus. Für die zweite Zeile der Matrix ergibt sich somit

$$x_2 + \frac{5}{16}\, x_3 = 5$$
$$x_2 = 5 - \frac{5}{16}\, t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Anzahl der Lösungen X

Um x_1 zu berechnen, setzt man nun x_2 und x_3 in die erste Zeile ein. Es folgt

$$x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 11.$$

Umstellen nach x_1 ergibt

$$\begin{aligned} x_1 &= 11 - 2 \cdot \left(5 - \frac{5}{16}\,t\right) - \frac{1}{2}\,t \\ &= 1 + \frac{1}{8}\,t \quad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Anzahl der Lösungen XI

Als Gesamtlösung haben wir also Folgendes erhalten ($t \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + \frac{1}{8}\,t \\ x_2 &= 5 - \frac{5}{16}\,t \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

Anzahl der Lösungen XII

Wir können die Lösung auch wie folgt darstellen:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{8}t \\ 5 - \frac{5}{16}t \\ t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{8}t \\ -\frac{5}{16}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{5}{16} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Man nennt dies die *Parameterform der Lösung*.

Aufgabe 4

Bestimme die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems mit dem Gauß- und mit dem Gauß-Jordan-Verfahren.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 8x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 7x_2 - 27x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - 15x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Bestimme die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 3x_3 \phantom{{}+x_4} - 4x_5 &= -5 \\ 2x_1 - 6x_2 + 6x_3 + x_4 - 12x_5 &= -9 \\ 2x_1 - 6x_2 + 6x_3 - 2x_4 \phantom{{}-8x_5} &= -12 \\ 3x_1 - 9x_2 + 9x_3 - x_4 - 8x_5 &= -16 \end{aligned}$$

Gib die gefundene Lösung in Parameterform an!

Vektorräume

Definition I

Gegeben seien eine Menge V, ein Körper $(K, +, \cdot)$, eine innere zweistellige Verknüpfung $\oplus : V \times V \to V$ (die Vektoraddition) sowie eine äußere zweistellige Verknüpfung $\odot : K \times V \to V$ (die skalare Multiplikation).

Man nennt $(V, \oplus, \odot)$ einen *Vektorraum über dem Körper K* (kurz: *K-Vektorraum*), wenn es sich bei $(V, \oplus)$ um eine abelsche Gruppe handelt und wenn für die skalare Multiplikation $\odot$ sowohl ein neutrales Element existiert als auch die „Assoziativ- und Distributivgesetze" gelten.

Definition II

- Die Vektoraddition $\oplus$ ist assoziativ. Für alle $u, v, w \in V$ gilt:
  $$\left(u \oplus v\right) \oplus w = u \oplus \left(v \oplus w\right) = u \oplus v \oplus w.$$
- Es existiert ein neutrales Element $0_V \in V$, so dass für alle $v \in V$ gilt:
  $$v \oplus 0_V = 0_V \oplus v = v.$$
  Das Element 0_V wird als *Nullvektor* bezeichnet.
- Zu jedem Element $v \in V$ existiert ein Element $-v$, für das gilt:
  $$v \oplus \left(-v\right) = \left(-v\right) \oplus v = 0_V.$$
- Die Vektoraddition $\oplus$ ist kommutativ. Für alle $u, v \in V$ gilt:
  $$u \oplus v = v \oplus u.$$

Definition III

- Für alle $\lambda, \mu \in K$, $v \in V$ gilt (Assoziativgesetz):
$$(\lambda \cdot \mu) \odot v = \lambda \odot (\mu \odot v).$$
- Es existiert ein neutrales Element $1_K \in K$, so dass für alle $v \in V$ gilt:
$$1_K \odot v = v.$$
- Zusammen mit der Vektoraddition $\oplus$ gilt für alle $\lambda \in K$, $u, v \in V$ das Distributivgesetz:
$$\lambda \odot (u \oplus v) = (\lambda \odot u) \oplus (\lambda \odot v).$$
- Zusammen mit der Addition $+$ im Körper K gilt für alle $\lambda, \mu \in K$, $v \in V$ das Distributivgesetz:
$$(\lambda + \mu) \odot v = (\lambda \odot v) \oplus (\mu \odot v).$$

Definition IV

In der Mathematik ist es üblich, sowohl die Addition im Körper K als auch die Addition im Vektorraum V mit demselben Operator $+$ zu bezeichnen, obgleich es sich um verschiedene Operationen handelt. Analog werden die Multiplikation im Körper K und die skalare Multiplikation im Vektorraum V mit $\cdot$ bezeichnet. In der Praxis besteht im Allgemeinen keine Gefahr, die Additionen bzw. Multiplikationen zu verwechseln.

Untervektorraum

Gegeben sei ein Vektorraum $(V, +, \cdot)$ über einem Körper K. Man nennt eine Teilmenge $U \subseteq V$ genau dann einen *Untervektorraum* bzw. *Unterraum* von V, wenn U nichtleer und bezüglich der Vektoraddition $+$ und der skalaren Multiplikation $\cdot$ abgeschlossen ist, d.h., falls die folgenden Eigenschaften gelten:

- $U \neq \emptyset$;
- $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$;
- $u \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot u \in U$.

Aufgabe 6

Entscheide für die folgenden Mengen $U_1, \ldots, U_5$, ob es sich um einen Unterraum des $\mathbb{R}^4$ handelt:

a) $U_1 = \Big\{ \big(x_1, x_2, x_3, x_4\big) \mid x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 0 \Big\}$;

b) $U_2 = \Big\{ \big(x_1, x_2, x_3, x_4\big) \mid x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \Big\}$;

c) $U_3 = \Big\{ \big(x_1, x_2, x_3, x_4\big) \mid 2x_1 + x_2 - 5x_4 \neq x_3 \Big\}$;

d) $U_4 = \Big\{ \big(x_1, x_2, x_3, x_4\big) \mid x_4 = x_1 + x_2 - 2x_3 \Big\}$;

e) $U_5 = \Big\{ \big(x_1, x_2, x_3, x_4\big) \mid x_1 = x_3^2 \Big\}$.

Aufgabe 7

a) Es sei $V = \mathbb{R}^3$. Gib eine Menge $U \subseteq V$ an, die bezüglich der Vektoraddition abgeschlossen ist, bezüglich der skalaren Multiplikation jedoch *nicht* abgeschlossen ist.

b) Es sei $V = \mathbb{R}^3$. Gib eine Menge $U \subseteq V$ an, die bezüglich der skalaren Multiplikation abgeschlossen ist, bezüglich der Vektoraddition jedoch *nicht* abgeschlossen ist.

Aufgabe 8

Gegeben seien ein Vektorraum V über einem Körper K sowie zwei Untervektorräume $U_1 \subseteq V$ und $U_2 \subseteq V$.

Zeige, dass es sich bei der Schnittmenge $U_1 \cap U_2$ ebenfalls um einen Untervektorraum von V handelt.

Linearkombination

Gegeben seien ein Vektorraum V über einem Körper K, Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ sowie Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$.

Einen Vektor v, der sich durch

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

darstellen lässt, nennt man *Linearkombination* von $v_1, \ldots, v_n$. Die Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ werden *Koeffizienten* der Linearkombination genannt.

Lineare Hülle

Gegeben seien ein Vektorraum V über einem Körper K sowie Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$. Man nennt die Menge

$$\mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_n) = \left\{ \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \right\}$$

die *lineare Hülle* von $v_1, \ldots, v_n$. Die lineare Hülle ist folglich die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren v_i.

Die lineare Hülle der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ wird häufig auch als $\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_n)$ geschrieben.

Lineare Unabhängigkeit I

Gegeben sei ein Vektorraum V über einem Körper K. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen

- *linear abhängig*, wenn neben der trivialen Lösung

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0_K$$

noch mindestens eine weitere Lösung für die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0_V$$

existiert. In diesem Fall besitzen nicht alle Skalare λ_i den Wert 0_K. Gilt beispielsweise $\lambda_k \neq 0_K$, so kann durch Umstellen der Gleichung eine Linearkombination für den Vektor v_k gefunden werden:

$$v_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \cdot v_1 - \ldots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} \cdot v_{k-1} - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \cdot v_{k+1} - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \cdot v_n.$$

Lineare Unabhängigkeit II

Gegeben sei ein Vektorraum V über einem Körper K. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen

- *linear unabhängig*, wenn neben der trivialen Lösung

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0_K$$

keine weiteren Lösungen für die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0_V$$

existieren. In diesem Fall ist es nicht möglich, einen der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ als Linearkombination der anderen Vektoren darzustellen.

Aufgabe 9

Entscheide für die folgenden Vektoren, ob sie linear abhängig oder linear unabhängig sind. Gib jeweils eine Begründung.

a) $v_1 = (1, 3, 5)$, $v_2 = (2, -1, -1)$ und $v_3 = (-2, 15, 23)$.

b) $v_1 = (1, 0, -1, 2)$, $v_2 = (0, 2, 3, 1)$, $v_3 = (4, 3, -2, 0)$ und $v_4 = (2, -1, 2, -3)$.

c) $v_1 = (1, 5, 7, -6)$, $v_2 = (-9, -1, 0, 3)$, $v_3 = (8, 4, -4, -2)$, $v_4 = (1, 3, 3, 7)$ und $v_5 = (42, -23, 0, 1)$.

Aufgabe 10

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ der Polynome mit Koeffizienten aus den reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Die Operationen seien die Polynomaddition sowie die Multiplikation mit reellen Zahlen.

Entscheide, ob die die folgenden Polynome linear abhängig oder linear unabhängig sind.

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= x^2 + x \\
p_2(x) &= x^2 + 3x - 1 \\
p_3(x) &= 4x - 2
\end{aligned}
$$

Basis I

Gegeben seien ein Vektorraum V über einem Körper K sowie die Vektoren $b_1, \ldots, b_n \in V$.

Man nennt eine Teilmenge $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq V$ eine *Basis* des Vektorraums V, falls die folgenden Eigenschaften gelten:

- Die Vektoren $b_1, \ldots, b_n$ sind linear unabhängig.
- Die Vektoren $b_1, \ldots, b_n$ erzeugen den Vektorraum V. Für alle Elemente $v \in V$ existieren (eindeutig bestimmte) Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so dass gilt:

$$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n.$$

Basis II

Zum Bestimmen einer Basis eines durch Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ erzeugten Unterraums kann der Gauß-(Jordan-)Algorithmus verwendet werden. Zunächst werden die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ als Zeilen einer Matrix geschrieben:

$$\begin{bmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{bmatrix}.$$

Wird diese anschließend in Zeilenstufenform überführt, so bilden die Nichtnullzeilen $v'_1, \ldots, v'_r$ der entstandenen Matrix eine Basis des durch die ursprünglichen Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ aufgespannten Unterraums.

Basisergänzungssatz

Sei V ein K-Vektorraum, $M \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge und E ein Erzeugendensystem von V. Dann lässt sich M durch Elemente aus E zu einer Basis von V ergänzen.

Aufgabe 11

Gegeben seien die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 2, 3) \\ v_2 &= (-1, 4, -2) \\ v_3 &= (-1, 10, -1) \\ v_4 &= (-4, 22, -7). \end{aligned}$$

a) Bestimme eine Basis von $\mathrm{Lin}\,(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
b) Gib die Dimension von $\mathrm{Lin}\,(v_1, v_2, v_3, v_4)$ an.
c) Um welchen Raum handelt es sich bei $\mathrm{Lin}\,(v_1, v_2, v_3, v_4)$?

Aufgabe 12

Es sei $U = \left\{ (x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Zeige, dass es sich bei den Vektoren $b_1 = (1, 1, 0)$ und $b_2 = (2, -1, 0)$ um eine Basis des Unterraums U handelt.

Aufgabe 13

Bestimme eine Basis des folgenden Untervektorraums $U \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + x_2 = 0 \wedge x_1 - x_3 = 0 \right\}.$$