Tutorium: Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Bonusklausur am 13.05.2019 (Teil 1, Lösungen)

30. April 2019

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1 I

Überführen der Matrix in Zeilenstufenform:

$$
\begin{array}{cccc|l}
1 & 2 & 1 & 1 & \\
2 & 1 & -2 & 0 & \mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{I} \\
3 & 1 & -3 & 1 & \mathrm{III} - 3\cdot\mathrm{I} \\
1 & 3 & 2 & 1 & \mathrm{IV} - \mathrm{I} \\
\hline
1 & 2 & 1 & 1 & \\
0 & -3 & -4 & -2 & \mathrm{II}\cdot(-\frac{1}{3}) \\
0 & -5 & -6 & -2 & \\
0 & 1 & 1 & 0 & \\
\hline
1 & 2 & 1 & 1 & \\
0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \\
0 & -5 & -6 & -2 & \mathrm{III} + 5\cdot\mathrm{II} \\
0 & 1 & 1 & 0 & \mathrm{IV} - \mathrm{II}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc|l}
1 & 2 & 1 & 1 & \\
0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \\
0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \mathrm{III}\cdot\frac{3}{2} \\
0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \\
\hline
1 & 2 & 1 & 1 & \\
0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \\
0 & 0 & 1 & 2 & \\
0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \mathrm{IV} + \frac{1}{3}\cdot\mathrm{III} \\
\hline
1 & 2 & 1 & 1 & \\
0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \\
0 & 0 & 1 & 2 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Aufgabe 1 II

Überführen der Matrix in reduzierte Zeilenstufenform:

$$
\begin{array}{cccc|l}
1 & 2 & 1 & 1 & \mathrm{I} - \mathrm{III} \\
0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \mathrm{II} - \frac{4}{3}\cdot\mathrm{III} \\
0 & 0 & 1 & 2 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
1 & 2 & 0 & -1 & \mathrm{I} - 2\cdot\mathrm{II} \\
0 & 1 & 0 & -2 & \\
0 & 0 & 1 & 2 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 3 & \\
0 & 1 & 0 & -2 & \\
0 & 0 & 1 & 2 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Aufgabe 2

Überführen der Matrix in Zeilenstufenform:

$$
\begin{array}{ccc|l}
2 & 1 & 4 & \mathrm{I} \cdot 3 \\
3 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 3 & 2 & \\
3 & 0 & 1 & \mathrm{II} + 2 \cdot \mathrm{I} \\
\hline
1 & 3 & 2 & \\
0 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Aufgabe 3

Überführen in Zeilenstufenform liefert die folgende Matrix:

$$
\begin{bmatrix}
1 & -2 & -4 & -1 & 7 & 3 & -17 & -85 & -72 & -136 \\
0 & 1 & 4 & -1 & -2 & -1 & 6 & 31 & 23 & 44 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -8 & -8 & -15 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & -7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Aufgabe 4 I

Überführen der Matrix in reduzierte Zeilenstufenform:

$$
\begin{array}{rrr|r|l}
1 & 2 & -8 & 1 & \\
3 & 7 & -27 & 5 & \mathrm{II} - 3 \cdot \mathrm{I} \\
2 & 4 & -15 & 1 & \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{I} \\
\hline
1 & 2 & -8 & 1 & \mathrm{I} + 8 \cdot \mathrm{III} \\
0 & 1 & -3 & 2 & \mathrm{II} + 3 \cdot \mathrm{III} \\
0 & 0 & 1 & -1 & \\
\hline
1 & 2 & 0 & -7 & \mathrm{I} - 2 \cdot \mathrm{II} \\
0 & 1 & 0 & -1 & \\
0 & 0 & 1 & -1 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & -5 & \\
0 & 1 & 0 & -1 & \\
0 & 0 & 1 & -1 &
\end{array}
$$

Aufgabe 4 II

Rückwärtseinsetzen in die zweite Matrix, die bereits in Zeilenstufenform vorliegt, liefert das gesuchte Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= -1 \\
x_2 &= 2 + 3x_3 \\
&= -1 \\
x_1 &= 1 - 2x_2 + 8x_3 \\
&= -5
\end{aligned}
$$

Dasselbe Ergebnis kann außerdem an der letzten Matrix in reduzierter Zeilenstufenform direkt abgelesen werden.

Aufgabe 5 I

Aufstellen der erweiterten Koeffizientenmatrix und Überführen in Zeilenstufenform:

$$
\begin{array}{rrrrr|r|l}
1 & -3 & 3 & 0 & -4 & -5 & \\
2 & -6 & 6 & 1 & -12 & -9 & \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\
2 & -6 & 6 & -2 & 0 & -12 & \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{I} \\
3 & -9 & 9 & -1 & -8 & -16 & \mathrm{IV} - 3 \cdot \mathrm{I} \\
\hline
1 & -3 & 3 & 0 & -4 & -5 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & \\
0 & 0 & 0 & -2 & 8 & -2 & \mathrm{III} + 2 \cdot \mathrm{II} \\
0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & \mathrm{IV} + \mathrm{II} \\
\hline
1 & -3 & 3 & 0 & -4 & -5 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Aufgabe 5 II

x_1 und x_4 sind die führenden Variablen. Die freien Variablen sind x_2, x_3 und x_5:

$$x_2 = r, \quad x_3 = s, \quad x_5 = t.$$

Rückwärtseinsetzen ergibt:

$$
\begin{aligned}
x_5 &= t \\
x_4 &= 1 + 4t \\
x_3 &= s \\
x_2 &= r \\
x_2 &= -5 + 3r - 3s + 4t
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5 III

In Parameterform lässt sich die Lösung wie folgt darstellen:

$$x = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (r, s, t \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 6 I

a) U_1 ist kein Unterraum, da es nicht abgeschlossen bzgl. der skalaren Multiplikation ist. Es gilt z.B. $u = (-1, 0, 0, 0) \in U_1$, aber $-u = (1, 0, 0, 0) \notin U_1$.

b) U_2 ist wegen $(0, 0, 0, 0) \notin U_2$ kein Unterraum.

c) U_3 ist wegen $(0, 0, 0, 0) \notin U_3$ kein Unterraum.

d) $\rightarrow$ siehe nächste Folie

e) U_5 ist kein Unterraum, da es nicht abgeschlossen bzgl. der skalaren Multiplikation ist. Es gilt z.B. $u = (1, 0, 1, 0) \in U_5$, aber $2u = (2, 0, 2, 0) \notin U_5$.

Aufgabe 6 II

U_4 ist ein Unterraum.

(i) $U_4 \neq \emptyset$, da z.B. $0 \in U_4$ gilt.

(ii) Für $u, v \in U_4$ gilt $u + v \in U_4$.

$$
\begin{aligned}
u + v &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_1 + u_2 - 2u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_1 + v_2 - 2v_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \\ u_1 + u_2 - 2u_3 + v_1 + v_2 - 2v_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \\ (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) - 2(u_3 + v_3) \end{pmatrix} \in U_4
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6 III

(iii) Für $u \in U_4$ gilt $\lambda u \in U_4$.

$$
\begin{aligned}
\lambda u &= \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_1 + u_2 - 2u_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \\ \lambda(u_1 + u_2 - 2u_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \\ \lambda u_1 + \lambda u_2 - 2\lambda u_3 \end{pmatrix} \in U_4
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7

a) Die Menge U_1 aus Aufgabe 6a ist beispielsweise abgeschlossen bzgl. der Vektoraddition, nicht jedoch bezüglich der skalaren Multiplikation.

Analog lässt sich eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ definieren, die die gewünschten Eigenschaften besitzt:

$$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 \geq 0 \right\}.$$

b) Die folgende Menge U ist abgeschlossen bzgl. der skalaren Multiplikation, nicht jedoch gegenüber der Vektoraddition.

$$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \cdot x_2 = 0 \right\}.$$

Aufgabe 8

- $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$:

  Aus $0 \in V_1$ und $0 \in V_2$ folgt $0 \in V_1 \cap V_2$, somit ist $V_1 \cap V_2$ nicht leer.

- $u, v \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow u + v \in V_1 \cap V_2$:

  Aus $u, v \in V_1 \cap V_2$ folgt $u, v \in V_1$ und $u, v \in V_2$. Da V_1 und V_2 Unterräume sind, gilt $u + v \in V_1$ und $u + v \in V_2$. Hieraus folgt implizit $u + v \in V_1 \cap V_2$.

- $v \in V_1 \cap V_2, \lambda \in K \Rightarrow \lambda v \in V_1 \cap V_2$:

  Aus $v \in V_1 \cap V_2$ folgt $v \in V_1$ und $v \in V_2$. Da V_1 und V_2 Unterräume sind, gilt $\lambda v \in V_1$ und $\lambda v \in V_2$. Hieraus folgt implizit $\lambda v \in V_1 \cap V_2$.

Aufgabe 9

a) Die Vektoren sind linear abhängig; es gilt $v_3 = 4v_1 - 3v_2$.

b) Aufstellen der erweiterten Koeffizientenmatrix der Gleichung $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$ und Überführen in Zeilenstufenform liefert

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Rückwärtseinsetzen ergibt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ als einzige Lösung. Die Vektoren sind folglich linear unabhängig.

c) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_5$ sind linear abhängig; 5 Vektoren des $\mathbb{R}^4$ können niemals linear unabhängig sein.

Aufgabe 10 I

Zum Prüfen der linearen Unabhängigkeit der Polynome $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ muss die folgende Gleichung gelöst werden:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot p_1(x) + \lambda_2 \cdot p_2(x) + \lambda_3 \cdot p_3(x) &= 0 \\ \lambda_1 \cdot \left(x^2 + x\right) + \lambda_2 \cdot \left(x^2 + 3x - 1\right) + \lambda_3 \cdot \left(4x - 2\right) &= 0 \\ \left(\lambda_1 + \lambda_2\right) \cdot x^2 + \left(\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3\right) \cdot x + \left(-\lambda_2 - 2\lambda_3\right) &= 0 \end{aligned}$$

Zwei Polynome sind gleich, wenn ihre Koeffizienten gleich sind. Die obige Gleichung entspricht dem folgenden Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 10 II

Lösen mit dem Gauß-(Jordan-)Verfahren ergibt:

$$\lambda_1 = 2t, \quad \lambda_2 = -2t, \quad \lambda_3 = t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Da neben der trivialen Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ noch weitere Lösungen existieren, sind die Polynome $p_1(x)$, $p_2(x)$ und $p_3(x)$ also linear abhängig.

Aufgabe 11

a) Aufschreiben der Vektoren als **Zeilen** einer Matrix und anschließendes Überführen in Zeilenstufenform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 10 & -1 \\ -4 & 22 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 12 & 2 \\ 0 & 30 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alle Nicht-Null-Zeilen bilden eine Basis von $\operatorname{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

b) $\operatorname{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ besitzt die zwei Basisvektoren $b_1 = (1, 2, 3)$ und $b_2 = (0, 6, 1)$, d.h. $\dim(\operatorname{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)) = 2$.

c) Es handelt sich um eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 12 I

Um zu zeigen, dass es sich bei $b_1 = (1, 1, 0)$ und $b_2 = (2, -1, 0)$ um eine Basis von U handelt, muss gezeigt werden, dass b_1 und b_2 linear unabhängig sind, was in diesem Fall trivial ist, da b_1 und b_2 keine Vielfachen voneinander sind. Außerdem muss jedes Element $u = (u_1, u_2, 0) \in U$ als Linearkombination von b_1 und b_2 dargestellt werden können. Es muss also gelten:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 &= u_1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= u_2 \end{aligned}$$

Aufgabe 12 II

Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{cc|r|l}
1 & 2 & u_1 & \\
1 & -1 & u_2 & \mathrm{II} - \mathrm{I} \\
\hline
1 & 2 & u_1 & \\
0 & -3 & u_2 - u_1 & \mathrm{II} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\
\hline
1 & 2 & u_1 & \mathrm{I} - 2 \cdot \mathrm{II} \\
0 & 1 & -\frac{u_2 - u_1}{3} & \\
\hline
1 & 0 & u_1 + \frac{2(u_2 - u_1)}{3} & \\
0 & 1 & \frac{-u_2 + u_1}{3} &
\end{array}$$

Die Lösung kann direkt abgelesen werden:

$$\lambda_1 = \frac{1}{3} u_1 + \frac{2}{3} u_2 \qquad \lambda_2 = \frac{1}{3} u_1 - \frac{1}{3} u_2$$

Jedes Element $u \in U$ kann also durch b_1 und b_2 dargestellt werden. Es handelt sich um eine Basis.

Aufgabe 13 I

Die beiden Bedingungen der Menge U können durch das folgende lineare Gleichungssystem in Matrixform dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufstellen der erweiterten Koeffizientenmatrix und Überführen in reduzierte Zeilenstufenform liefert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Aufgabe 13 II

Die Wahl von $x_3 = t$ $(t \in \mathbb{R})$ liefert:

$$\begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= -2t \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

In Parameterform lässt sich die Lösung wie folgt darstellen:

$$x = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Der Vektor $b = (1, -2, 1)$ stellt eine Basis von U dar.