

# Tutorium: Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Bonusklausur am 13.05.2019  
(Teil 2)

8. Mai 2019

# Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

# Lineare Abbildungen

## Definition 1

Gegeben seien zwei Vektorräume  $V$  und  $W$  über einem Körper  $K$ . Eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  heißt *lineare Abbildung*, wenn für alle  $x, y \in V$  und  $\lambda \in K$  die folgenden Eigenschaften gelten:

- ▶  $f$  ist *homogen*:

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$

- ▶  $f$  ist *additiv*:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Die beiden Bedingungen können zusammengefasst werden:

$$f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y).$$

## Definition II

Eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  lässt sich eindeutig beschreiben durch

- ▶ die Bilder einer Basis des Vektorraums  $V$ ;
- ▶ eine Abbildungsmatrix  $A$ .

## Aufgabe 1

Entscheide, ob es sich bei der folgenden Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um eine lineare Abbildung handelt:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ -x + 2z \end{pmatrix}.$$

## Aufgabe 2

Gegeben seien eine lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sowie die Bilder der Basisvektoren  $b_1 = (1, 2)$  und  $b_2 = (0, -1)$  des  $\mathbb{R}^2$ . Es sei

$$f(b_1) = f(1, 2) = (2, 4)$$

$$f(b_2) = f(0, -1) = (5, -1).$$

Bestimme das Bild  $f(v)$  des Vektors  $v = (5, 3)$ .

# Abbildungsmatrix I

Gegeben sei eine lineare Abbildung  $f : K^n \rightarrow K^m$ .

Die Bilder  $f(e_1), \dots, f(e_n)$  der Einheitsvektoren  $e_1, \dots, e_n$  sind die Spalten der Abbildungsmatrix  $A$ ; es gilt

$$A = \left[ \begin{array}{c|ccc|c} & & & & \\ f(e_1) & & \cdots & & f(e_n) \\ & & & & \end{array} \right].$$

Handelt es sich bei der gegebenen Basis des Vektorraums  $K^n$  nicht um die Einheitsvektoren, so müssen beim Erstellen der Abbildungsmatrix zunächst die Bilder der Einheitsvektoren bestimmt werden.



## Abbildungsmatrix II

Beispiel:

Gegeben sei eine lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Es gelte

$$f(e_1) = f(1, 0) = (1, 2, 3)$$

$$f(e_2) = f(0, 1) = (0, -1, 2)$$

Die Bilder der Einheitsvektoren sind die Spalten der Abbildungsmatrix  $A$ ; es gilt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

## Aufgabe 3

Gegeben seien eine lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sowie die Bilder der Basisvektoren  $b_1 = (1, 2)$  und  $b_2 = (0, -2)$  des  $\mathbb{R}^2$ . Es sei

$$f(b_1) = f(1, 2) = (2, 5, 4)$$

$$f(b_2) = f(0, -2) = (1, 0, 3).$$

Bestimme die zur linearen Abbildung  $f$  gehörende Abbildungsmatrix  $A$ .

# Bild und Kern einer linearen Abbildung

Sei  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung zwischen zwei  $K$ -Vektorräumen.

Der *Kern* von  $f$  ist die Menge

$$\text{Kern}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}.$$

Das *Bild* von  $f$  ist die Menge

$$\text{Bild}(f) = \{f(v) \mid v \in V\}.$$

Der Kern von  $f$  ist ein Unterraum von  $V$ . Das Bild von  $f$  ist ein Unterraum von  $W$ .

# Dimensionsformel

Sei  $V$  ein endlich erzeugter  $K$ -Vektorraum,  $W$  ein beliebiger Vektorraum und  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann ist  $\text{Bild}(f)$  endlich erzeugt und es gilt

$$\dim(V) = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)).$$

# Inverse Matrix

# Inverse Matrix I

Eine quadratische Matrix  $A$  heißt *invertierbar*, falls es eine Matrix  $A^{-1}$  gibt, für die

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

gilt. Nicht jede quadratische Matrix ist invertierbar. Falls eine Matrix invertierbar ist, so ist ihr Inverses allerdings eindeutig bestimmt.

## Inverse Matrix II

Frage:

Woher weiß man, ob eine quadratische Matrix invertierbar ist oder nicht? Wenn man weiß, dass eine Matrix invertierbar ist, wie kann man die inverse Matrix bestimmen?

## Inverse Matrix III

Antwort:

Man erstellt zunächst die folgende Blockmatrix:

$$\left[ A \mid E \right].$$

$A$  ist die zu invertierende Matrix,  $E$  ist eine entsprechend dimensionierte Einheitsmatrix.

Mithilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus wird die Matrix  $[A|E]$  anschließend in reduzierte Zeilenstufenform überführt.



# Inverse Matrix IV

Beispiel:

Gesucht ist das Inverse der Matrix  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ .

Lösung:

Zunächst wird die entsprechende Blockmatrix aufgestellt:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

## Inverse Matrix V

Zuerst bringen wir das Hauptdiagonalelement der ersten Spalte in die richtige Form, indem wir die erste Zeile mit  $-1$  multiplizieren.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Um den Rest der ersten Spalte in die richtige Form zu bringen, addieren wir das  $(-4)$ -fache der ersten zur dritten Zeile.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

## Inverse Matrix VI

Weiter mit Spalte 2. Zunächst vertauschen wir die zweite und dritte Zeile.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Durch Multiplikation mit  $\frac{1}{12}$  bringen wir das Hauptdiagonalelement von Zeile 2 in die richtige Form.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{12} & \frac{4}{12} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

## Inverse Matrix VII

Durch Addition des 2-fachen der zweiten Zeile zur ersten Zeile bringen wir die zweite Spalte in die richtige Form.

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{12} & -\frac{4}{12} & 0 & \frac{2}{12} \\ 0 & 1 & \frac{1}{12} & \frac{4}{12} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Weiter mit Spalte 3. Multiplikation der dritten Zeile mit  $\frac{1}{3}$  ergibt:

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{12} & -\frac{4}{12} & 0 & \frac{2}{12} \\ 0 & 1 & \frac{1}{12} & \frac{4}{12} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array} \right]$$

## Inverse Matrix VIII

Addition geeigneter Vielfacher zu den ersten beiden Zeilen bringt schließlich die dritte Spalte in die richtige Form.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{18} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array} \right]$$

Wir haben also die inverse Matrix  $A^{-1}$  zu  $A$  gefunden.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

# Inverse Matrix IX

Ist die Matrix  $A$  nicht invertierbar, so lässt sie sich mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus nicht zur Einheitsmatrix  $E$  umformen.

Im Gegenzug kann die Matrix  $A$  immer zur Einheitsmatrix  $E$  umgeformt werden, wenn sie invertierbar ist.

## Aufgabe 4

a) Es sei  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  gegeben durch  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ .

Berechne  $A^{-1}$  mithilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus.  
Überprüfe dein Ergebnis auf Richtigkeit!

b) Zeige, dass die folgende Matrix  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  nicht invertierbar ist:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & -12 & 13 \end{bmatrix}.$$

# Lineare Gleichungssysteme & inverse Matrizen

Hat ein lineares Gleichungssystem eine eindeutige Lösung, so lässt sich dieses auch mithilfe der Inversen der Koeffizientenmatrix  $A$  berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}Ax &= b \\ \Rightarrow x &= A^{-1}b.\end{aligned}$$



# Determinanten

## Determinanten kleiner Matrizen

Die Determinanten von  $1 \times 1$ ,  $2 \times 2$  und  $3 \times 3$  Matrizen können mithilfe der folgenden Formeln bestimmt werden:

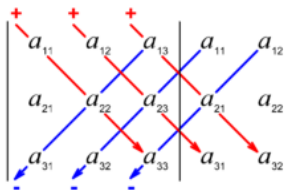
$$\det [a_{11}] = a_{11}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

# Die Regel von Sarrus

Die Regel zur Berechnung einer  $3 \times 3$  Determinante ist auch als *Regel von Sarrus* bekannt und kann durch folgendes Schema einfach dargestellt werden:



# Die Leibniz-Formel

Die Determinante einer beliebigen  $n \times n$  Matrix  $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$  kann mithilfe der *Leibniz-Formel* berechnet werden:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \left( \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \right).$$

## Der Laplacesche Entwicklungssatz

Die Determinante einer beliebigen  $n \times n$  Matrix  $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$  kann mithilfe des *Laplaceschen Entwicklungssatzes* berechnet werden.

- ▶ Entwicklung nach der  $j$ -ten Spalte:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

- ▶ Entwicklung nach der  $i$ -ten Spalte:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Die Matrizen  $A_{ij}$  sind die  $(n-1) \times (n-1)$  Untermatrizen von  $A$ , die man durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte erhält.

## Gaußsches Eliminationsverfahren

Die Determinante einer beliebigen  $n \times n$  Matrix  $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$  kann mithilfe des *Gaußschen Eliminationsverfahrens* berechnet werden.

- ▶ Ist  $A$  eine Dreiecksmatrix, dann ist das Produkt der Hauptdiagonalelemente die Determinante von  $A$ .
- ▶ Falls  $B$  aus  $A$  hervorgeht, indem man zwei Zeilen bzw. zwei Spalten vertauscht, so gilt  $\det(B) = -\det(A)$ .
- ▶ Falls  $B$  aus  $A$  hervorgeht, indem man ein Vielfaches einer Zeile bzw. Spalte zu einer anderen Zeile bzw. Spalte addiert, so gilt  $\det(A) = \det(B)$ .
- ▶ Falls  $B$  aus  $A$  hervorgeht, indem man das  $\lambda$ -fache einer Zeile bzw. Spalte bildet, so gilt  $\det(B) = \lambda \det(A)$ .

## Aufgabe 5

Gegeben sei die folgende Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bestimme die Determinante  $\det(A)$

- mithilfe der Regel von Sarrus;
- mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes;
- mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens.

# Matrizen II



# Die Fundament Räume einer Matrix I

Gegeben sei eine  $m \times n$  - Matrix  $A$ .

- ▶ Der *Zeilenraum*  $Z(A)$  ist der durch die  $m$  Zeilenvektoren der Matrix  $A$  aufgespannte Vektorraum:

$$\begin{aligned} Z(A) &= \text{Lin}(z_1, \dots, z_m) \\ &= \left\{ \lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_m z_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

- ▶ Der *Spaltenraum*  $S(A)$  ist der durch die  $n$  Spaltenvektoren der Matrix  $A$  aufgespannte Vektorraum:

$$\begin{aligned} S(A) &= \text{Lin}(s_1, \dots, s_n) \\ &= \left\{ \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

# Die Fundamentlräume einer Matrix II

Gegeben sei eine  $m \times n$  - Matrix  $A$ .

- ▶ Der *Nullraum*  $N(A)$  ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems  $Ax = 0$ :

$$N(A) = \{x \mid Ax = 0\}.$$

- ▶ Der *Nullraum der Transponierten*  $N(A^T)$  ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems  $A^T x = 0$ :

$$N(A^T) = \{x \mid A^T x = 0\}.$$

# Die Fundamentalmräume einer Matrix III

Gegeben sei eine  $m \times n$  - Matrix  $A$ . Es gelten die folgenden Zusammenhänge:

- ▶  $Z(A) = S(A^T)$
- ▶  $S(A) = Z(A^T)$
- ▶  $\dim(Z(A)) = \dim(S(A))$
- ▶  $\dim(Z(A)) + \dim(N(A)) = n$
- ▶  $\dim(S(A)) + \dim(N(A^T)) = m$
- ▶  $\text{rg}(A) = \dim(Z(A)) = \dim(S(A))$

# Zusammenhänge mit Determinanten

Im Folgenden sei eine quadratische  $n \times n$  - Matrix  $A$  betrachtet:

- ▶  $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) < n$
- ▶  $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \dim(N(A)) > 0$
- ▶  $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = n$
- ▶  $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \dim(N(A)) = 0$
- ▶  $\det(A) = 0 \Leftrightarrow A^{-1}$  existiert nicht
- ▶  $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$  existiert

# Zusammenhänge mit linearen Gleichungssystemen

Im Folgenden sei eine quadratische  $n \times n$  - Matrix  $A$  betrachtet:

- ▶  $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A | b) \Rightarrow Ax = b$  ist nicht lösbar
- ▶  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A | b) = n \Rightarrow Ax = b$  ist eindeutig lösbar
- ▶  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A | b) < n \Rightarrow Ax = b$  hat unendlich viele Lösungen

## Aufgabe 6

Gegeben seien Vektoren  $z_1, z_2, z_3$  und  $z_4$  des  $\mathbb{R}^4$ , die die Zeilen einer  $4 \times 4$  Matrix  $A$  bilden. Es gelte  $\dim(Z(A)) = 2$ . Wahr oder falsch? (Mit kurzer Begründung!)

- a) Das Gleichungssystem  $Ax = b$  besitzt eine eindeutige Lösung.
- b) Es gilt  $\dim(N(A^T)) = 2$ .
- c) Eine Aussage über  $\det(A)$  ist nur dann möglich, wenn  $A$  vollständig bekannt ist.
- d) Die inverse Matrix  $A^{-1}$  existiert nicht.
- e) Die Spaltenvektoren  $s_1, \dots, s_4$  der Matrix  $A$  sind linear abhängig.