Tutorium: Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Bonusklausur am 13.05.2019
(Teil 2)

8. Mai 2019

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Lineare Abbildungen

Definition I

Gegeben seien zwei Vektorräume V und W über einem Körper K. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *lineare Abbildung*, wenn für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in K$ die folgenden Eigenschaften gelten:

- f ist *homogen*:
$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$
- f ist *additiv*:
$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Die beiden Bedingungen können zusammengefasst werden:

$$f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y).$$

Definition II

Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ lässt sich eindeutig beschreiben durch

- die Bilder einer Basis des Vektorraums V;
- eine Abbildungsmatrix A.

Aufgabe 1

Entscheide, ob es sich bei der folgenden Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ um eine lineare Abbildung handelt:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ -x + 2z \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Gegeben seien eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sowie die Bilder der Basisvektoren $b_1 = (1, 2)$ und $b_2 = (0, -1)$ des $\mathbb{R}^2$. Es sei

$$f(b_1) = f(1, 2) = (2, 4)$$
$$f(b_2) = f(0, -1) = (5, -1).$$

Bestimme das Bild $f(v)$ des Vektors $v = (5, 3)$.

Abbildungsmatrix I

Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : K^n \to K^m$.

Die Bilder $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ der Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ sind die Spalten der Abbildungsmatrix A; es gilt

$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ f(e_1) & \cdots & f(e_n) \\ | & & | \end{bmatrix}.$$

Handelt es sich bei der gegebenen Basis des Vektorraums K^n nicht um die Einheitsvektoren, so müssen beim Erstellen der Abbildungsmatrix zunächst die Bilder der Einheitsvektoren bestimmt werden.

Abbildungsmatrix II

Beispiel:

Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Es gelte

$$f(e_1) = f(1,0) = (1,2,3)$$
$$f(e_2) = f(0,1) = (0,-1,2)$$

Die Bilder der Einheitsvektoren sind die Spalten der Abbildungsmatrix A; es gilt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 3

Gegeben seien eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sowie die Bilder der Basisvektoren $b_1 = (1,2)$ und $b_2 = (0,-2)$ des $\mathbb{R}^2$. Es sei

$$f(b_1) = f(1,2) = (2,5,4)$$
$$f(b_2) = f(0,-2) = (1,0,3).$$

Bestimme die zur linearen Abbildung f gehörende Abbildungsmatrix A.

Bild und Kern einer linearen Abbildung

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen.

Der *Kern* von f ist die Menge

$$\mathrm{Kern}(f) = \Big\{ v \in V \mid f(v) = 0 \Big\}.$$

Das *Bild* von f ist die Menge

$$\mathrm{Bild}(f) = \Big\{ f(v) \mid v \in V \Big\}.$$

Der Kern von f ist ein Unterraum von V. Das Bild von f ist ein Unterraum von W.

Dimensionsformel

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum, W ein beliebiger Vektorraum und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist $\mathrm{Bild}(f)$ endlich erzeugt und es gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)).$$

Inverse Matrix

Inverse Matrix I

Eine quadratische Matrix A heißt *invertierbar*, falls es eine Matrix A^{-1} gibt, für die

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

gilt. Nicht jede quadratische Matrix ist invertierbar. Falls eine Matrix invertierbar ist, so ist ihr Inverses allerdings eindeutig bestimmt.

Inverse Matrix II

<u>Frage</u>:

Woher weiß man, ob eine quadratische Matrix invertierbar ist oder nicht? Wenn man weiß, dass eine Matrix invertierbar ist, wie kann man die inverse Matrix bestimmen?

Inverse Matrix III

<u>Antwort</u>:

Man erstellt zunächst die folgende Blockmatrix:

$$\left[A \mid E\right].$$

A ist die zu invertierende Matrix, E ist eine entsprechend dimensionierte Einheitsmatrix.

Mithilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus wird die Matrix $[A|E]$ anschließend in reduzierte Zeilenstufenform überführt.

Inverse Matrix IV

Beispiel:

Gesucht ist das Inverse der Matrix $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Lösung:

Zunächst wird die entsprechende Blockmatrix aufgestellt:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Inverse Matrix V

Zuerst bringen wir das Hauptdiagonalenelement der ersten Spalte in die richtige Form, indem wir die erste Zeile mit -1 multiplizieren.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Um den Rest der ersten Spalte in die richtige Form zu bringen, addieren wir das (-4)-fache der ersten zur dritten Zeile.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Inverse Matrix VI

Weiter mit Spalte 2. Zunächst vertauschen wir die zweite und dritte Zeile.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Durch Multiplikation mit $\frac{1}{12}$ bringen wir das Hauptdiagonalelement von Zeile 2 in die richtige Form.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{12} & \frac{4}{12} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Inverse Matrix VII

Durch Addition des 2-fachen der zweiten Zeile zur ersten Zeile bringen wir die zweite Spalte in die richtige Form.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{12} & -\frac{4}{12} & 0 & \frac{2}{12} \\ 0 & 1 & \frac{1}{12} & \frac{4}{12} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Weiter mit Spalte 3. Multiplikation der dritten Zeile mit $\frac{1}{3}$ ergibt:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{12} & -\frac{4}{12} & 0 & \frac{2}{12} \\ 0 & 1 & \frac{1}{12} & \frac{4}{12} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$$

Inverse Matrix VIII

Addition geeigneter Vielfacher zu den ersten beiden Zeilen bringt schließlich die dritte Spalte in die richtige Form.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{18} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$$

Wir haben also die inverse Matrix A^{-1} zu A gefunden.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Inverse Matrix IX

Ist die Matrix A nicht invertierbar, so lässt sie sich mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus nicht zur Einheitsmatrix E umformen.

Im Gegenzug kann die Matrix A immer zur Einheitsmatrix E umgeformt werden, wenn sie invertierbar ist.

Aufgabe 4

a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.
Berechne A^{-1} mithilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus.
Überprüfe dein Ergebnis auf Richtigkeit!

b) Zeige, dass die folgende Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ nicht invertierbar ist:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & -12 & 13 \end{bmatrix}.$$

Lineare Gleichungssysteme & inverse Matrizen

Hat ein lineares Gleichungssystem eine eindeutige Lösung, so lässt sich dieses auch mithilfe der Inversen der Koeffizientenmatrix A berechnen. Es gilt

$$Ax = b$$

$$\Rightarrow x = A^{-1}b.$$

Determinanten

Determinanten kleiner Matrizen

Die Determinanten von 1×1, 2×2 und 3×3 Matrizen können mithilfe der folgenden Formeln bestimmt werden:

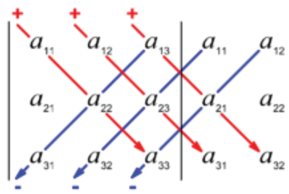
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} = a_{11}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Die Regel von Sarrus

Die Regel zur Berechnung einer 3×3 Determinante ist auch als *Regel von Sarrus* bekannt und kann durch folgendes Schema einfach dargestellt werden:



Die Leibniz-Formel

Die Determinante einer beliebigen $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ kann mithilfe der *Leibniz-Formel* berechnet werden:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right).$$

Der Laplacesche Entwicklungssatz

Die Determinante einer beliebigen $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ kann mithilfe des *Laplaceschen Entwicklungssatzes* berechnet werden.

- Entwicklung nach der j-ten Spalte:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

- Entwicklung nach der i-ten Spalte:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Die Matrizen A_{ij} sind die $(n-1) \times (n-1)$ Untermatrizen von A, die man durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte erhält.

Gaußsches Eliminationsverfahren

Die Determinante einer beliebigen $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ kann mithilfe des *Gaußschen Eliminationsverfahrens* berechnet werden.

- Ist A eine Dreiecksmatrix, dann ist das Produkt der Hauptdiagonalenelemente die Determinante von A.
- Falls B aus A hervorgeht, indem man zwei Zeilen bzw. zwei Spalten vertauscht, so gilt $\det(B) = -\det(A)$.
- Falls B aus A hervorgeht, indem man ein Vielfaches einer Zeile bzw. Spalte zu einer anderen Zeile bzw. Spalte addiert, so gilt $\det(A) = \det(B)$.
- Falls B aus A hervorgeht, indem man das λ-fache einer Zeile bzw. Spalte bildet, so gilt $\det(B) = \lambda \det(A)$.

Aufgabe 5

Gegeben sei die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bestimme die Determinante $\det(A)$

a) mithilfe der Regel von Sarrus;

b) mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes;

c) mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens.

Matrizen II

Die Fundamentalräume einer Matrix I

Gegeben sei eine $m \times n$ - Matrix A.

- Der *Zeilenraum* $Z(A)$ ist der durch die m Zeilenvektoren der Matrix A aufgespannte Vektorraum:

$$\begin{aligned} Z(A) &= \mathrm{Lin}\left(z_1, \ldots, z_m\right) \\ &= \left\{\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_m z_m \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

- Der *Spaltenraum* $S(A)$ ist der durch die n Spaltenvektoren der Matrix A aufgespannte Vektorraum:

$$\begin{aligned} S(A) &= \mathrm{Lin}\left(s_1, \ldots, s_n\right) \\ &= \left\{\lambda_1 s_1 + \ldots + \lambda_n s_n \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Die Fundamentalräume einer Matrix II

Gegeben sei eine $m \times n$ - Matrix A.

- Der *Nullraum* $N(A)$ ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$:

$$N(A) = \left\{x \mid Ax = 0\right\}.$$

- Der *Nullraum der Transponierten* $N(A^T)$ ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $A^T x = 0$:

$$N\left(A^T\right) = \left\{x \mid A^T x = 0\right\}.$$

Die Fundamentalräume einer Matrix III

Gegeben sei eine $m \times n$ - Matrix A. Es gelten die folgenden Zusammenhänge:

- $Z(A) = S(A^T)$
- $S(A) = Z(A^T)$
- $\dim(Z(A)) = \dim(S(A))$
- $\dim(Z(A)) + \dim(N(A)) = n$
- $\dim(S(A)) + \dim(N(A^T)) = m$
- $\mathrm{rg}(A) = \dim(Z(A)) = \dim(S(A))$

Zusammenhänge mit Determinanten

Im Folgenden sei eine quadratische $n \times n$ - Matrix A betrachtet:

- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) < n$
- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \dim(N(A)) > 0$
- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = n$
- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \dim(N(A)) = 0$
- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ existiert nicht
- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ existiert

Zusammenhänge mit linearen Gleichungssystemen

Im Folgenden sei eine quadratische $n \times n$ - Matrix A betrachtet:

- $\operatorname{rg}(A) \neq \operatorname{rg}(A \mid b) \Rightarrow Ax = b$ ist nicht lösbar
- $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \mid b) = n \Rightarrow Ax = b$ ist eindeutig lösbar
- $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \mid b) < n \Rightarrow Ax = b$ hat unendlich viele Lösungen

Aufgabe 6

Gegeben seien Vektoren z_1, z_2, z_3 und z_4 des $\mathbb{R}^4$, die die Zeilen einer 4×4 Matrix A bilden. Es gelte $\dim\big(Z(A)\big) = 2$. Wahr oder falsch? (Mit kurzer Begründung!)

a) Das Gleichungssystem $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung.

b) Es gilt $\dim\big(N(A^T)\big) = 2$.

c) Eine Aussage über $\det(A)$ ist nur dann möglich, wenn A vollständig bekannt ist.

d) Die inverse Matrix A^{-1} existiert nicht.

e) Die Spaltenvektoren $s_1, \ldots, s_4$ der Matrix A sind linear abhängig.

