Tutorium: Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Bonusklausur am 24.06.2019

20. Juni 2019

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Konvergenz

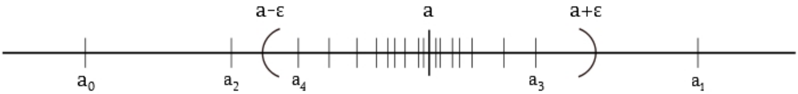
Definition der Konvergenz I

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen *konvergiert* gegen eine reelle Zahl a, wenn es für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert uneigentlich* (bzw. *divergiert bestimmt*) gegen $\pm\infty$, wenn es für jede reelle Zahl $r > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n > r$ (bzw. $a_n < r$) für alle $n > n_0$ gilt.

Definition der Konvergenz II

Graphische Veranschaulichung:



Aufgabe 1

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_n = \frac{-7n+5}{6n}$.

a) Bestimme den Grenzwert der Folge (a_n) für $n \to \infty$.

b) Überprüfe mithilfe der Definition der Konvergenz, ob es sich bei dem in a) gefundenen Wert tatsächlich um den Grenzwert der Folge (a_n) handelt.

Aufgabe 2

Finde den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{n^2}{4n^2 - 1}$$

und zeige mithilfe der Definition der Konvergenz, dass es sich bei dem gefundenen Wert tatsächlich um den Grenzwert handelt.

Aufgabe 2 - Lösung

Als vermuteter Grenzwert ergibt sich $a = \frac{1}{4}$. Einsetzen in die Definition der Konvergenz:

$$
\begin{aligned}
& \left| \frac{n^2}{4n^2-1} - \frac{1}{4} \right| && < && \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \left| \frac{n^2 - \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)}{4n^2-1} - \right| && < && \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \left| \frac{\frac{1}{4}}{4n^2-1} \right| && < && \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\frac{1}{4}}{4n^2-1} && < && \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{4} && < && \varepsilon \cdot \left(4n^2-1\right) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{16\varepsilon} + \frac{1}{4} && < && n^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{\frac{1}{16\varepsilon} + \frac{1}{4}} && < && n
\end{aligned}
$$

Somit gilt die obige Aussage für alle $n > n_0 = \left\lceil \sqrt{\frac{1}{16\varepsilon} + \frac{1}{4}} \right\rceil$.

Cauchysches Konvergenzkriterium

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > n_0$ gilt.

Aufgabe 3

Zeige, dass für jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das Cauchysche Konvergenzkriterium gilt.

Obere und untere Schranken

Gegeben sei eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Menge $M = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sei die Menge aller Folgenglieder der Folge (x_n).

Als *obere Schranke* der Menge M (und somit auch der Folge (x_n)) bezeichnet man einen Wert k, für den $x_i \leq k$ für alle $x_i \in M$ gilt. Der kleinste Wert k, für den die genannte Eigenschaft gilt, wird *Supremum* genannt.

Als *untere Schranke* der Menge M (und somit auch der Folge (x_n)) bezeichnet man einen Wert ℓ, für den $x_i \geq \ell$ für alle $x_i \in M$ gilt. Der größte Wert ℓ, für den die genannte Eigenschaft gilt, wird *Infimum* genannt.

Aufgabe 4

Gegeben seien zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$x_n = 1 + \frac{n+1}{n}$$
$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Bestimme, falls möglich, sowohl das Infimum als auch das Supremum dieser Folgen. Falls diese Werte nicht existieren, ist eine (kurze) Begründung hierfür anzugeben.

Satz über monotone, beschränkte Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton steigend*, falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Entsprechend definiert man *monoton fallend* für $a_{n+1} \leq a_n$. Eine Folge heißt *monoton*, falls sie monoton steigend oder monoton fallend ist.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, falls die Menge ihrer Folgenglieder beschränkt ist (d.h., falls die Menge $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist).

Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Aufgabe 5

Zeige mithilfe des Satzes über monotone und beschränkte Folgen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_{n+1} &= \left(\frac{a_n}{4}\right)^2 + 1 \end{aligned}$$

Reihen

Definition

Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aus dieser Folge kann man eine neue Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt konstruieren:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= \sum_{i=1}^{n} a_i. \end{aligned}$$

Man nennt den Wert s_n die *n-te Partialsumme* und die Folge (s_n) eine *Reihe*.

Harmonische Reihe I

Die folgende Reihe wird als *harmonische Reihe* bezeichnet:

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Der Wert H_n wird als *n-te harmonische Zahl* bezeichnet. Die harmonische Reihe divergiert.

Harmonische Reihe II

Die folgende Reihe wird als *allgemeine harmonische Reihe* bezeichnet:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^\alpha}.$$

Allgemeine harmonische Reihen divergieren für $\alpha \leq 1$ und konvergieren für $\alpha > 1$.

Geometrische Reihe I

Die folgende Reihe wird als *geometrische Reihe* bezeichnet:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i.$$

Die geometrische Reihe konvergiert für $|q| < 1$ und divergiert für $|q| > 1$.

Geometrische Reihe II

Die n-te Partialsumme der geometrische Reihe kann mithilfe der *geometrischen Summenformel* berechnet werden:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Für $|q| < 1$ kann die geometrische Summenformel ebenfalls herangezogen werden, um den Grenzwert der geometrischen Reihe zu berechnen:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} q^i \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) = \frac{1}{1-q}.$$

Grenzwerte

Rechenregeln für Grenzwerte I

Gegeben seien zwei reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$. Es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$$

sowie für $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

Rechenregeln für Grenzwerte II

Für Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gilt zudem

$$\lim_{n \to \infty} \left(c \cdot a_n \right) = c \cdot \lim_{n \to \infty} a_n = c \cdot a$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(a_n + c \right) = \left(\lim_{n \to \infty} a_n \right) + c = a + c.$$

Aufgabe 6

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{-9n^4+n^2-6n+9}{4n^4-3n^3-27}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^3-12n^2+6}{-n^4+3n+99}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n^6+3n^2-2}+4n}{4n^2+7n-28}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+n-2}{2n^2-2}-\dfrac{18n^2+8n+9}{4n^2-7}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+5n-8}{6n+1}+\dfrac{-2n^2+3n-4}{4n-7}\right)$

Grenzwerte und stetige Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0).$$

Aufgabe 7

Berechne die folgenden Grenzwerte und gib an, an welchen Stellen die Stetigkeit der beteiligten Funktionen verwendet wird.

(i) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\cos \left(\frac{\pi n^3 + 7n - 2}{4n^3 + n^2 - 1} \right) \right)$

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{\frac{16n^2 - n - 5}{9n^2 + 2n + 6}}$

Funktionsgrenzwerte

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Betrachtet man den Grenzwert $\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n)$, also den Grenzwert des Funktionswerts für $x_n \to x_0$, so spricht man von einem *Funktionsgrenzwert*.

Der Funktionsgrenzwert $\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n)$ an der Stelle x_0 existiert genau dann, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ derselbe Grenzwert herauskommt.

Aufgabe 8

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x + 2} \right)$

(ii) $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x + 2} \right)$

Stetigkeit

Definition der Stetigkeit I

Es sei f eine reelle Funktion und $x_0 \in D_f$. Die Funktion f heißt *stetig an der Stelle* x_0, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D_f$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Die Funktion f heißt *stetig auf* X (für $X \subseteq D_f$), falls f an jeder Stelle $x_0 \in X$ stetig ist.

Definition der Stetigkeit II

Beispiel einer unstetigen Funktion:

Definition der Stetigkeit III

Für jede stetige Funktion muss für alle $x_0 \in D_f$ insbesondere die folgende Eigenschaft gelten:

$$\lim_{x_n \to x_0^-} f(x_n) = f(x_0) = \lim_{x_n \to x_0^+} f(x_n).$$

Aufgabe 9

Die Funktion $f : [0, 11] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{, für } 0 \leq x < 2; \\ -\frac{1}{2}x + 7 & \text{, für } 2 \leq x < 5; \\ x - 1 & \text{, für } 5 \leq x \leq 11. \end{cases}$$

An welchen Stellen ist f stetig, an welchen Stellen ist f unstetig? Begründe deine Antwort.

Definition der Stetigkeit IV

Die Nacheinanderausführung/Verknüpfung zweier stetiger Funktionen ergibt wieder eine stetige Funktion.

Die Nacheinanderausführung/Verknüpfung zweier unstetiger Funktionen ergibt nicht zwangsweise wieder eine unstetige Funktion.

Aufgabe 10

Die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{5}{\sqrt{x}}\right) & \text{, für } x \neq 0; \\ 0 & \text{, für } x = 0; \end{cases}$$

$$\text{und} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\left(\frac{5}{\sqrt{x}}\right) & \text{, für } x \neq 0; \\ 0 & \text{, für } x = 0. \end{cases}$$

An welchen Stellen ist f stetig, an welchen Stellen ist f unstetig? Analog für g. Begründe deine Antworten.

ε, δ-Definition der Stetigkeit

Es sei f eine reelle Funktion und $x_0 \in D_f$. Die Funktion f heißt stetig an der Stelle x_0, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\Big| f(x) - f(x_0) \Big| < \varepsilon$$

für alle $x \in D_f$ gilt, die $|x - x_0| < \delta$ erfüllen.

Aufgabe 11

Zeige mithilfe der ε, δ-Definition der Stetigkeit, dass die Funktion $f(x) = x^2 + x - 2$ an der Stelle $x_0 = 2$ für den Spezialfall $\varepsilon = 1$ stetig ist, indem du ein geeignetes δ angibst.

Aufgabe 11 - Lösung

Für $\varepsilon = 1$ muss die Ungleichung $|f(x) - f(x_0)| < 1$ gelten. Einsetzen von $x_0 = 2$ in $|f(x) - f(x_0)|$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(2)| &= |x^2 + x - 2 - 2^2 - 2 + 2| \\ &= |x^2 + x - 6| \\ &= |(x+3)(x-2)| \\ &= |x+3| \cdot |x-2| \end{aligned}$$

Für $|x| < 3$ gilt $|x+3| < 6$ und folglich

$$|x+3| \cdot |x-2| < 6 \cdot |x-2|.$$

Gilt nun zusätzlich $|x-2| < \frac{1}{6}$, so folgt

$$|f(x) - f(2)| = |x+3| \cdot |x-2| < 6 \cdot |x-2| < 6 \cdot \frac{1}{6} = 1,$$

woraus $\delta = \frac{1}{6}$ als mögliche Lösung folgt.

Aufgabe 12

Beweise mithilfe der ε, δ-Definition der Stetigkeit, dass die Funktion $f(x) = x^2 + x - 2$ für $x_0 > 0$ stetig ist.

Aufgabe 12 - Lösung I

Es soll δ berechnet werden, so dass die folgende Ungleichung für einen Wert $x_0 > 0$ und ein $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
|f(x_0+\delta) - f(x_0)| &< \varepsilon \\
|(x_0+\delta)^2 + (x_0+\delta) - 2 - (x_0^2 + x_0 - 2)| &< \varepsilon \\
|x_0^2 + 2x_0\delta + \delta^2 + x_0 + \delta - 2 - x_0^2 - x_0 + 2| &< \varepsilon \\
|2x_0\delta + \delta^2 + \delta| &< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Für $x_0 > 0$ ist dieser Betrag positiv. Es folgt

$$\begin{aligned}
2x_0\delta + \delta^2 + \delta &< \varepsilon \\
\delta^2 + (2x_0+1)\delta - \varepsilon &< 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 12 - Lösung II

Lösen der quadratischen Gleichung $\delta^2 + (2x_0 + 1)\delta - \varepsilon = 0$ ergibt

$$\delta_{1/2} = -\frac{2x_0 + 1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2x_0 + 1}{2}\right)^2 + \varepsilon}.$$

Es handelt sich um eine nach oben geöffnete Parabel, d.h. die zugehörige Ungleichung $\delta^2 + (2x_0 + 1)\delta - \varepsilon < 0$ ist für

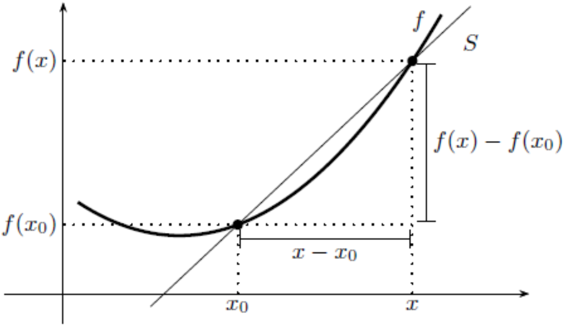
$$-\frac{2x_0 + 1}{2} - \sqrt{\left(\frac{2x_0 + 1}{2}\right)^2 + \varepsilon} < \delta < -\frac{2x_0 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{2x_0 + 1}{2}\right)^2 + \varepsilon}$$

erfüllt. Da per Definition $\delta > 0$ gelten muss, kann der Bereich der zulässigen δ-Werte wie folgt eingeschränkt werden:

$$0 < \delta < -\frac{2x_0 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{2x_0 + 1}{2}\right)^2 + \varepsilon}.$$

Differenzierbarkeit

Differenzenquotient



Der *Differenzenquotient* ist definiert als $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Definition der Differenzierbarkeit I

Die reelle Funktion f heißt *differenzierbar* an der Stelle $x_0 \in D_f$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x_n \to x_0} \left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right)$$

existiert. Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $f'(x_0)$ und nennen ihn die *Ableitung von f an der Stelle x_0*.

f heißt differenzierbar auf $X \subseteq D_f$, wenn f an jeder Stelle $x_0 \in X$ differenzierbar ist

Zu f lässt sich eine Funktion f' mit $D_{f'} = \left\{ x_0 \in D_f : f'(x_0) \text{ existiert} \right\}$ definieren, indem man jedem x_0 den Wert $f'(x_0)$ zuordnet. Die Funktion f' nennt man die *Ableitung von f*.

Definition der Differenzierbarkeit II

Oftmals wird auch folgende Definition der Differenzierbarkeit verwendet:

Die reelle Funktion f heißt *differenzierbar an der Stelle* $x_0 \in D_f$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

existiert. Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $f'(x_0)$ und nennen ihn *Ableitung von* f *an der Stelle* x_0.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit I

Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

Im Gegenzug ist aber nicht jede stetige Funktion auch differenzierbar.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit II

Betragsfunktion: $f(x) = |x|$

Sei $x_n = \frac{1}{n}$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left|0+\frac{1}{n}\right|-0}{0+\frac{1}{n}-0}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) = 1.$$

Sei $x_n = -\frac{1}{n}$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left|0-\frac{1}{n}\right|-0}{0-\frac{1}{n}-0}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}}\right) = -1.$$

Für $x_0 = 0$ existiert also kein Grenzwert. Somit ist f in x_0 nicht differenzierbar, obwohl es an dieser Stelle stetig ist.

Aufgabe 13

Entscheide, ob die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 = \frac{12}{5}$ differenzierbar ist:

$$f(x) = \left| \frac{5x - 12}{4} \right| .$$

Stetige Differenzierbarkeit I

Eine Funktion f heißt *stetig differenzierbar*, wenn ihre Ableitung f' für alle $x \in D_f$ stetig ist.

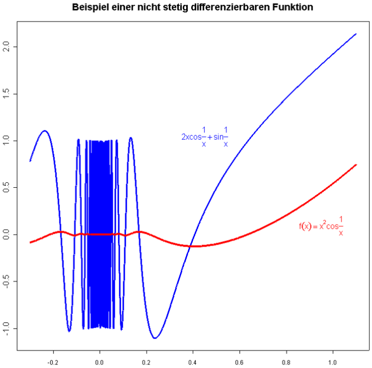
Stetige Differenzierbarkeit II

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Ist in jedem Punkt inkl. $x_0 = 0$ stetig.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Ist in jedem Punkt außer $x_0 = 0$ stetig.



Aufgabe 14

Zeige mithilfe der Definition der Differenzierbarkeit, dass es sich bei der Funktion $f'(x) = 4x - 5$ um die Ableitung der Funktion $f(x) = 2x^2 - 5x + 7$ handelt.

Ableitungsregeln

Potenzfunktionen

$$\left[x^n\right]' = n \cdot x^{n-1}$$

Exponentialfunktionen

$$\left[e^x\right]' = e^x$$

$$\left[a^x\right]' = a^x \cdot \ln a$$

Logarithmusfunktionen

$$\left[\ln x\right]' = \frac{1}{x}$$

$$\left[\log_a x\right]' = \frac{1}{\ln a \cdot x}$$

$$\left[\log_a x\right]' = \log_a e \cdot \frac{1}{x}$$

Wurzelfunktionen

$$\left[\sqrt{x}\right]' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$\left[\sqrt{x}\right]' = \left[x^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left[\sqrt[n]{x}\right]' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$\left[\sqrt[n]{x}\right]' = \left[x^{\frac{1}{n}}\right]' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$\left[\sqrt[n]{x^m}\right]' = \frac{m}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

$$\left[\sqrt[n]{x^m}\right]' = \left[x^{\frac{m}{n}}\right]' = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$$

Trigonometrische Funktionen I

$$\left[\sin x\right]' = \cos x \qquad \left[\tan x\right]' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left[\cos x\right]' = -\sin x \qquad \left[\tan x\right]' = 1 + \tan^2 x$$

$$\left[-\sin x\right]' = -\cos x \qquad \left[\cot x\right]' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$\left[-\cos x\right]' = \sin x \qquad \left[\cot x\right]' = -1 - \cot^2 x$$

Trigonometrische Funktionen II

$$\Big[\arcsin x\Big]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Big[\arccos x\Big]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Big[\arctan x\Big]' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\Big[\operatorname{arccot} x\Big]' = \frac{-1}{x^2+1}$$

Hyperbolische Funktionen I

$$\left[\tanh x\right]' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\left[\sinh x\right]' = \cosh x \qquad \left[\tanh x\right]' = 1 - \tanh^2 x$$

$$\left[\cosh x\right]' = \sinh x \qquad \left[\coth x\right]' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$$

$$\left[\coth x\right]' = 1 - \coth^2 x$$

Hyperbolische Funktionen II

$$\left[\operatorname{arsinh} x\right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\left[\operatorname{arcosh} x\right]' = \frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}$$

$$\left[\operatorname{artanh} x\right]' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\left[\operatorname{arcoth} x\right]' = \frac{1}{1-x^2}$$

Ableitungsregeln

$$\Big[u \pm v\Big]' = u' \pm v' \qquad \text{(Summenregel)}$$

$$\Big[u \cdot v\Big]' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad \text{(Produktregel)}$$

$$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

$$\Big[u\big(v(x)\big)\Big]' = u'\Big(v(x)\Big) \cdot v'(x) \qquad \text{(Kettenregel)}$$

$$\Big[u(x)^{v(x)}\Big]' = \Big[e^{v(x)\cdot \ln(u(x))}\Big]' \qquad \text{(Logarithmisches Differenzieren)}$$

Aufgabe 15

a) Zeige mithilfe der Definition der Differenzierbarkeit, dass die Reziprokenregel

$$\left[\frac{1}{v(x)}\right]' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$$

gilt. Der Einfachheit halber sei angenommen, dass für die Funktion v auf dem gesamten Definitionsbereich $v(x) \neq 0$ gilt.

b) Leite die Quotientenregel mithilfe der Produktregel und der Reziprokenregel her.

Aufgabe 16

Bestimme die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f_1(x) = x \cdot \sin(x)$

b) $f_2(x) = \sqrt{1 + x^2}$

c) $f_3(x) = \frac{3^x}{x}$

Aufgabe 17

Gegeben seien die beiden Funktionen

$$h_1(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)} \qquad \text{und} \qquad h_2(x) = -1 - \cot^2(x).$$

Bestätige mithilfe der Quotientenregel, dass es sich sowohl bei h_1 als auch bei h_2 um eine Ableitung der Funktion $h(x) = \cot(x)$ handelt.

Aufgabe 18

Bestimme mithilfe der Umkehrregel die Ableitung der Funktion $\arctan x$.

Aufgabe 19

Bestimme die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f_1(x) = \sin\left(4x^5 - x^3 + 5x^2 + x - 23\right)$

b) $f_2(x) = \sqrt{\tan(x)} \cdot \arctan(\ln(x))$

c) $f_3(x) = (\sin x)^{3x^2 - x + 3}$

d) $f_4(x) = x^e \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \log_2 x$

Aufgabe 20

Bestimme die Ableitung der folgenden Funktion:

$$f(x) = \sin\left(\sqrt{\ln\left(\tan\left(\left(3^x + 1\right)^2\right)\right)}\right).$$