# Tutorium: Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Bonusklausur am 24.06.2019
(Lösungen)

20. Juni 2019

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de


  

# Aufgabe 1

Als Grenzwert ergibt sich $a = -\frac{7}{6}$. Überprüfen mithilfe der Definition der Konvergenz ergibt:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{-7n+5}{6n} - \left(-\frac{7}{6}\right) \right| && < && \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \left| \frac{5}{6n} \right| && < && \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{5}{6n} && < && \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{5}{6\varepsilon} && < && n
\end{aligned}$$

Für alle $n > n_0 = \left\lceil \frac{5}{6\varepsilon} \right\rceil$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Damit ist gezeigt, dass es sich bei $a = -\frac{7}{6}$ tatsächlich um den gesuchten Grenzwert handelt.

# Aufgabe 2

Als vermuteter Grenzwert ergibt sich $a = \frac{1}{4}$. Einsetzen in die Definition der Konvergenz:

$$
\begin{aligned}
& \left| \frac{n^2}{4n^2-1} - \frac{1}{4} \right| && < && \varepsilon \\
\Leftrightarrow\quad & \left| \frac{n^2 - \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)}{4n^2-1} - \right| && < && \varepsilon \\
\Leftrightarrow\quad & \left| \frac{\frac{1}{4}}{4n^2-1} \right| && < && \varepsilon \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{\frac{1}{4}}{4n^2-1} && < && \varepsilon \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{4} && < && \varepsilon \cdot \left(4n^2-1\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{16\varepsilon} + \frac{1}{4} && < && n^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{\frac{1}{16\varepsilon} + \frac{1}{4}} && < && n
\end{aligned}
$$

Somit gilt die obige Aussage für alle $n > n_0 = \left\lceil \sqrt{\frac{1}{16\varepsilon} + \frac{1}{4}} \right\rceil$.

# Aufgabe 3

Aufgrund der Konvergenz der Folge $(a_n)$ existiert ein Grenzwert $a$ sowie für jedes $\varepsilon > 0$ ein Wert $n_0$, so dass für $n, m > n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Addition der Ungleichungen liefert

$$|a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Abschätzen mit der Dreiecksungleichung liefert das Cauchy-Kriterium:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

# Aufgabe 4

Die Folge $(x_n)$ ist monoton fallend; ihren größten Wert nimmt sie für $n = 1$ an, für $n \to \infty$ nähert sich $(x_n)$ dem kleinsten Wert:

$$\limsup x_n = 3$$
$$\liminf x_n = 2.$$

Die Folge $(y_n)$ ist monoton steigend; ihren kleinsten Wert nimmt sie für $n = 1$ an, für $n \to \infty$ nähert sich $(y_n)$ dem größten Wert; $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ entspricht der Definition der Eulerschen Zahl $e$.

$$\limsup x_n = e$$
$$\liminf x_n = 2.$$

# Aufgabe 5 I

Beweis der Beschränktheit:

Es ist zu zeigen, dass $1 \leq a_n \leq 2$ gilt.

(I) Induktionsanfang:

$$a_1 = 2 \geq 1 \qquad \text{und} \qquad a_1 = 2 \leq 2 \quad \checkmark$$

(II) Induktionsschritt:

Die Behauptung gelte für ein festes $n \in \mathbb{N}$. Es folgt:

$$a_{n+1} = \left(\frac{a_n}{4}\right)^2 + 1 = \frac{1}{16} \cdot a_n^2 + 1 \geq \frac{1}{16} \cdot 1^2 + 1 = \frac{17}{16} \geq 1. \quad \checkmark$$

$$a_{n+1} = \left(\frac{a_n}{4}\right)^2 + 1 = \frac{1}{16} \cdot a_n^2 + 1 \leq \frac{1}{16} \cdot 2^2 + 1 = \frac{5}{4} \leq 2. \quad \checkmark$$

Aus (I) und (II) folgt die Richtigkeit der Behauptung.

# Aufgabe 5 II

Beweis der Monotonie:

Es ist zu zeigen, dass $a_{n+1} \leq a_n$ gilt.

(I) Induktionsanfang:

$$a_2 = \frac{5}{4} \leq 2 = a_1 \quad \checkmark$$

(II) Induktionsschritt:

Die Behauptung gelte für ein festes $n \in \mathbb{N}$. Es folgt:

$$a_{n+1} \leq a_n \overset{(\star)}{\Rightarrow} a_{n+1}^2 \leq a_n^2 \Rightarrow \left(\frac{a_{n+1}}{4}\right)^2 + 1 \leq \left(\frac{a_n}{4}\right)^2 + 1 \Rightarrow a_{n+2} \leq a_{n+1}.$$

$(\star)$ gilt wegen $a_n \geq 1$. Aus (I) und (II) folgt die Richtigkeit der Behauptung.

# Aufgabe 6a-b

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-9n^4+n^2-6n+9}{4n^4-3n^3-27}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4\left(-9+\frac{1}{n^2}-\frac{6}{n^3}+\frac{9}{n^4}\right)}{n^4\left(4+\frac{3}{n}-\frac{27}{n^4}\right)}\right)$$
$$=-\frac{9}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3-12n^2+6}{-n^4+3n+99}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3\left(5-\frac{12}{n}+\frac{6}{n^3}\right)}{n^4\left(-1+\frac{3}{n^3}+\frac{99}{n^4}\right)}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{-n}\right)$$
$$=0$$

# Aufgabe 6c

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^6+3n^2-2}+4n}{4n^2+7n-28}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^6\left(1+\frac{3}{n^4}-\frac{2}{n^6}\right)}+4n}{n^2\left(4+\frac{7}{n}-\frac{28}{n^2}\right)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^6}\cdot\sqrt{1+\frac{3}{n^4}-\frac{2}{n^6}}+4n}{n^2\left(4+\frac{7}{n}-\frac{28}{n^2}\right)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^4}-\frac{2}{n^6}}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{7}{n}-\frac{28}{n^2}\right)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{4}\right)$$

$$=\infty$$

# Aufgabe 6d

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+n-2}{2n^2-2}-\frac{18n^2+8n+9}{4n^2-7}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\left(5+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(2-\frac{2}{n^2}\right)}-\frac{n^2\left(18+\frac{8}{n}+\frac{9}{n^2}\right)}{n^2\left(4-\frac{7}{n^2}\right)}\right)\\
&=\frac{5}{2}-\frac{9}{2}\\
&=-2
\end{aligned}
$$

# Aufgabe 6e

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+5n-8}{6n+1}+\frac{-2n^2+3n-4}{4n-7}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(4n-7\right)\left(3n^2+5n-8\right)+\left(6n+1\right)\left(-2n^2+3n-4\right)}{\left(6n+1\right)\left(4n-7\right)}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{15n^2+88n+52}{24n^2-38n-7}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\left(15+\frac{88}{n}+\frac{52}{n^2}\right)}{n^2\left(24-\frac{38}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}\right)$$
$$=\frac{5}{8}$$

# Aufgabe 7

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{\pi n^3+7n-2}{4n^3+n-1}\right)\right) = \cos\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi n^3+7n-2}{4n^3+n-1}\right)\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{16n^2-n-5}{9n^2+2n+6}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{16n^2-n-5}{9n^2+2n+6}\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

Die Stetigkeit der cos- bzw. der $\sqrt{\ }$-Funktion wurde verwendet, um $\lim\limits_{n\to\infty}$ in die jeweilige Funktionen zu ziehen.

# Aufgabe 8

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^2+3x-2}{x+2}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2\cdot 1^2+3\cdot 1-2}{1+2}\right)$$
$$= 1$$

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{2x^2+3x-2}{x+2}\right) = \lim_{x\to -2}\left(\frac{(2x-1)\cdot(x+2)}{x+2}\right)$$
$$= \lim_{x\to -2}\left(2x-1\right)$$
$$= -5$$

# Aufgabe 9 I

In den Intervallen $(0,2)$, $(2,5)$ und $(5,11)$ ist die Funktion stetig, da sie dort jeweils ein Polynom ist; diese sind auf ihrem Definitionsbereich immer stetig.

$$
\begin{aligned}
f(2) &= 6 \\
\lim_{x_n \to 2^-} \Big(f(x_n)\Big) &= \lim_{x_n \to 2^-} \Big(x_n^2 + 2\Big) = 6 \\
\lim_{x_n \to 2^+} \Big(f(x_n)\Big) &= \lim_{x_n \to 2^+} \Big(-\frac{1}{2}x_n + 7\Big) = 6
\end{aligned}
$$

Wegen $\lim_{x_n \to 2^-} \Big(f(x_n)\Big) = f(2) = \lim_{x_n \to 2^+} \Big(f(x_n)\Big)$ ist $f$ an der Stelle $x_0 = 2$ stetig.

# Aufgabe 9 II

$$\lim_{x_n \to 5^-} \Big(f(x_n)\Big) = \lim_{x_n \to 5^-} \Big(-\frac{1}{2}x_n + 7\Big) = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{x_n \to 5^+} \Big(f(x_n)\Big) = \lim_{x_n \to 5^+} \Big(x_n - 1\Big) = 4$$

Wegen $\lim_{x_n \to 5^-} \Big(f(x_n)\Big) \neq \lim_{x_n \to 5^+} \Big(f(x_n)\Big)$ ist $f$ an der Stelle $x_0 = 5$ nicht stetig.

# Aufgabe 10 I

Aufgrund der Stetigkeit der beteiligten Funktionen und der Tatsache, dass die Nacheinanderausführung stetiger Funktionen wiederum stetig ist, ist $f$ für $x \neq 0$ stetig. Es bleibt $x_0 = 0$ zu überprüfen.

Es sei $x_n = \dfrac{1}{(2\pi n)^2}$. Es gilt $(x_n) \to x_0$.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{5}{\sqrt{x_n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{5}{\sqrt{\frac{1}{(2\pi n)^2}}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \cos(5 \cdot 2n\pi) = 1.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$ ist $f$ an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig.

# Aufgabe 10 II

Es gilt

$$\lim_{x_n \to 0}\left(-(x_n)^2\right) \leq \lim_{x_n \to 0}\left((x_n)^2 \cdot \cos\left(\frac{5}{\sqrt{x_n}}\right)\right) \leq \lim_{x_n \to 0}\left((x_n)^2\right).$$

Hieraus folgt

$$0 \leq \lim_{x_n \to 0}\left((x_n)^2 \cdot \cos\left(\frac{5}{\sqrt{x_n}}\right)\right) \leq 0.$$

Nach dem Einschließungssatz folgt

$$\lim_{x_n \to 0}\left((x_n)^2 \cdot \cos\left(\frac{5}{\sqrt{x_n}}\right)\right) = 0.$$

Wegen $\lim_{x_n \to 0} g(x_n) = g(x_0) = 0$ ist $g$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig.

# Aufgabe 11

Für $\varepsilon = 1$ muss die Ungleichung $|f(x) - f(x_0)| < 1$ gelten. Einsetzen von $x_0 = 2$ in $|f(x) - f(x_0)|$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(2)| &= |x^2 + x - 2 - 2^2 - 2 + 2| \\ &= |x^2 + x - 6| \\ &= |(x+3)(x-2)| \\ &= |x+3| \cdot |x-2| \end{aligned}$$

Für $|x| < 3$ gilt $|x+3| < 6$ und folglich

$$|x+3| \cdot |x-2| < 6 \cdot |x-2|.$$

Gilt nun zusätzlich $|x-2| < \frac{1}{6}$, so folgt

$$|f(x) - f(2)| = |x+3| \cdot |x-2| < 6 \cdot |x-2| < 6 \cdot \frac{1}{6} = 1,$$

woraus $\delta = \frac{1}{6}$ als mögliche Lösung folgt.

# Aufgabe 12 I

Es soll $\delta$ berechnet werden, so dass die folgende Ungleichung für einen Wert $x_0 > 0$ und ein $\varepsilon > 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
|f(x_0+\delta) - f(x_0)| &< \varepsilon \\
|(x_0+\delta)^2 + (x_0+\delta) - 2 - (x_0^2 + x_0 - 2)| &< \varepsilon \\
|x_0^2 + 2x_0\delta + \delta^2 + x_0 + \delta - 2 - x_0^2 - x_0 + 2| &< \varepsilon \\
|2x_0\delta + \delta^2 + \delta| &< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Für $x_0 > 0$ ist dieser Betrag positiv. Es folgt

$$
\begin{aligned}
2x_0\delta + \delta^2 + \delta &< \varepsilon \\
\delta^2 + (2x_0+1)\delta - \varepsilon &< 0.
\end{aligned}
$$

# Aufgabe 12 II

Lösen der quadratischen Gleichung $\delta^2 + (2x_0 + 1)\delta - \varepsilon = 0$ ergibt

$$\delta_{1/2} = -\frac{2x_0 + 1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2x_0 + 1}{2}\right)^2 + \varepsilon}.$$

Es handelt sich um eine nach oben geöffnete Parabel, d.h. die zugehörige Ungleichung $\delta^2 + (2x_0 + 1)\delta - \varepsilon < 0$ ist für

$$-\frac{2x_0 + 1}{2} - \sqrt{\left(\frac{2x_0 + 1}{2}\right)^2 + \varepsilon} < \delta < -\frac{2x_0 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{2x_0 + 1}{2}\right)^2 + \varepsilon}$$

erfüllt. Da per Definition $\delta > 0$ gelten muss, kann der Bereich der zulässigen $\delta$-Werte wie folgt eingeschränkt werden:

$$0 < \delta < -\frac{2x_0 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{2x_0 + 1}{2}\right)^2 + \varepsilon}.$$

# Aufgabe 13

Es ist zu überprüfen, ob der Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle $x_0 = \frac{12}{5}$ existiert.
Es sei $x_n = \frac{12}{5} + \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left|\frac{5\left(\frac{12}{5}+\frac{1}{n}\right)-12}{4}\right| - \left|\frac{5\cdot\frac{12}{5}-12}{4}\right|}{\frac{12}{5}+\frac{1}{n}-\frac{12}{5}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left|\frac{\frac{5}{n}}{4}\right|}{\frac{1}{n}}\right) = \frac{5}{4}$$

Es sei $x_n = \frac{12}{5} - \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left|\frac{5\left(\frac{12}{5}-\frac{1}{n}\right)-12}{4}\right| - \left|\frac{5\cdot\frac{12}{5}-12}{4}\right|}{\frac{12}{5}-\frac{1}{n}-\frac{12}{5}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left|\frac{-\frac{5}{n}}{4}\right|}{-\frac{1}{n}}\right) = -\frac{5}{4}$$

Der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert nicht, folglich ist die Funktion an der Stelle $x_0 = \frac{12}{5}$ nicht differenzierbar.

# Aufgabe 14

Bestimmen des Grenzwerts des Differenzenquotienten für die Stelle $x_0$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)\\
&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\left(2(x_0+h)^2-5(x_0+h)+7\right)-\left(2x_0^2-5x_0+7\right)}{h}\right)\\
&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{2x_0^2+4x_0h+2h^2-5x_0-5h+7-2x_0^2+5x_0-7}{h}\right)\\
&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{4x_0h+2h^2-5h}{h}\right)\\
&=\lim_{h\to 0}\left(4x_0+2h-5\right)\\
&=4x_0-5
\end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich um denselben Anstieg, der auch mithilfe der Funktion $f'(x)$ für die Stelle $x_0$ ermittelt werden kann.

# Aufgabe 15a I

Die Reziprokenregel kann direkt mithilfe des Grenzwerts des Differenzenquotienten hergeleitet werden. Es gilt

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{1}{v(x_0+h)}-\frac{1}{v(x_0)}}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{v(x_0)-v(x_0+h)}{v(x_0+h)\cdot v(x_0)}}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{v(x_0)-v(x_0+h)}{h\cdot v(x_0+h)\cdot v(x_0)}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{v(x_0+h)\cdot v(x_0)}\cdot\frac{v(x_0)-v(x_0+h)}{h}\right)
\end{aligned}
$$

# Aufgabe 15a II

Anwendung der Rechenregeln für Grenzwerte und der Definition des Differenzenquotienten ergibt die Reziprokenregel:

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{v(x_0+h)\cdot v(x_0)}\right)\cdot \lim_{h\to 0}\left(\frac{v(x_0)-v(x_0+h)}{h}\right)\\
&= \underbrace{\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{v(x_0+h)}\right)}_{=\frac{1}{v(x_0)}}\cdot\frac{1}{v(x_0)}\cdot\left(-\underbrace{\lim_{h\to 0}\left(\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}\right)}_{=v'(x_0)}\right)\\
&= -\frac{v'(x_0)}{(v(x_0))^2}
\end{aligned}
$$

# Aufgabe 15b

Herleitung der Quotientenregel mithilfe der Produktregel und der Reziprokenregel:

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{u}{v}\right]' &= \left[u \cdot \frac{1}{v}\right]' \\
&= u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \left[\frac{1}{v}\right]' \\
&= u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \left(-\frac{v'}{v^2}\right) \\
&= \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} \\
&= \frac{u'v - uv'}{v^2}
\end{aligned}
$$

# Aufgabe 16 I

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x \cdot \sin(x) \\
f_1'(x) &= [x]' \cdot \sin(x) + x \cdot [\sin(x)]' \\
&= \sin(x) + x \cdot \cos(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(x) &= \sqrt{1 + x^2} \\
f_2'(x) &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left[x^2 + 1\right]' \\
&= \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}
\end{aligned}
$$

# Aufgabe 16 II

$$
\begin{aligned}
f_3(x) &= \frac{3^x}{x} \\
f_3'(x) &= \frac{[3^x]' \cdot x - 3^x \cdot [x]'}{x^2} \\
&= \frac{3^x \cdot \ln 3 \cdot x - 3^x}{x^2}
\end{aligned}
$$

# Aufgabe 17

Es gilt $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Ableiten ergibt

$$\left[\cot x\right]' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$
$$= -\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x.$$

Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ folgt zudem

$$\left[\cot x\right]' = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

# Aufgabe 18

Es sei $\arctan x = y$ und somit $\tan y = x$. Gemäß der Umkehrregel gilt:

$$\Big[\arctan x\Big]' = \frac{1}{\Big[\tan y\Big]'} = \frac{1}{1 + tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

# Aufgabe 19a

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \sin\left(4 \cdot x^5 - x^3 + 5 \cdot x^2 + x - 23\right) \\
f_1'(x) &= \cos\left(4 \cdot x^5 - x^3 + 5 \cdot x^2 + x - 23\right) \cdot \left(4 \cdot x^5 - x^3 + 5 \cdot x^2 + x - 23\right)' \\
&= \cos\left(4x^5 - x^3 + 5x^2 + x - 23\right) \cdot \left(20x^4 - 3x^2 + 10x + 1\right)
\end{aligned}
$$

# Aufgabe 19b

$$
\begin{aligned}
f_2(x) &= \sqrt{\tan(x)} \cdot \arctan(\ln(x)) \\
f_2'(x) &= \left[\sqrt{\tan(x)}\right]' \cdot \arctan(\ln(x)) + \sqrt{\tan(x)} \cdot [\arctan(\ln(x))]' \\
&= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\tan(x)}} \cdot [\tan(x)]' \cdot \arctan(\ln(x)) + \sqrt{\tan(x)} \cdot \frac{1}{(\ln(x))^2 + 1} \cdot [\ln(x)]' \\
&= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\tan(x)}} \cdot \frac{1}{(\cos(x))^2} \cdot \arctan(\ln(x)) + \sqrt{\tan(x)} \cdot \frac{1}{(\ln(x))^2 + 1} \cdot \frac{1}{x} \\
&= \frac{\arctan(\ln(x))}{2 \cdot \sqrt{\tan(x)} \cdot (\cos(x))^2} + \frac{\sqrt{\tan(x)}}{x \cdot ((\ln(x))^2 + 1)}
\end{aligned}
$$

# Aufgabe 19c

$$f_3(x) = (\sin x)^{3x^2-x+3} = e^{\ln\left((\sin x)^{3x^2-x+3}\right)} = e^{(3x^2-x+3)\cdot\ln(\sin x)}$$

$$f_3'(x) = e^{(3x^2-x+3)\cdot\ln(\sin x)} \cdot \Big((3x^2-x+3)\cdot\ln(\sin x)\Big)'$$

$$= \Big[\ldots\Big] \cdot \Big(\big(3x^2-x+3\big)' \cdot \ln(\sin x) + (3x^2-x+3)\cdot\big(\ln(\sin x)\big)'\Big)$$

$$= \Big[\ldots\Big] \cdot \left((6x-1)\cdot\ln(\sin x) + \frac{(3x^2-x+3)\cdot\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= (\sin x)^{3x^2-x+3} \cdot \Big((6x-1)\cdot\ln(\sin x) + (3x^2-x+3)\cdot\cot x\Big)$$

# Aufgabe 19d

$$f_4(x) = x^e \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \log_2(x)$$

$$\begin{aligned}
f_4'(x) &= \left[x^e\right]' \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \log_2(x) + x^e \cdot \left[\cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right)\right]' \cdot \log_2(x) + x^e \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \left[\log_2(x)\right]' \\
&= e \cdot x^{e-1} \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \log_2(x) + x^e \cdot \left(-\sin\left(5 \cdot \sqrt{x}\right)\right) \cdot \left[5 \cdot \sqrt{x}\right]' \cdot \log_2(x) \\
&\quad + x^e \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{\ln(2) \cdot x} \\
&= e \cdot x^{e-1} \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \log_2(x) + x^e \cdot \left(-\sin\left(5 \cdot \sqrt{x}\right)\right) \cdot 5 \cdot \left[\sqrt{x}\right]' \cdot \log_2(x) \\
&\quad + x^e \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{\ln(2) \cdot x} \\
&= e \cdot x^{e-1} \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \log_2(x) + x^e \cdot \left(-\sin\left(5 \cdot \sqrt{x}\right)\right) \cdot 5 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot \log_2(x) \\
&\quad + x^e \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{\ln(2) \cdot x} \\
&= e \cdot x^{e-1} \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \log_2(x) + \frac{-5 \cdot x^e \cdot \sin\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \log_2(x)}{2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{x^e \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right)}{\ln(2) \cdot x}
\end{aligned}$$

# Aufgabe 20 I

$$f_3'(x) = \cos\left(\sqrt{\ln\left(\tan\left(\left(3^x+1\right)^2\right)\right)}\right) \cdot \left(\sqrt{\ln\left(\tan\left(\left(3^x+1\right)^2\right)\right)}\right)'$$

$$= \frac{\cos\left(\sqrt{\ln\left(\tan\left(\left(3^x+1\right)^2\right)\right)}\right) \cdot \left(\ln\left(\tan\left(\left(3^x+1\right)^2\right)\right)\right)'}{2 \cdot \sqrt{\ln\left(\tan\left(\left(3^x+1\right)^2\right)\right)}}$$

$$= \frac{\cos\left(\sqrt{\ln\left(\tan\left(\left(3^x+1\right)^2\right)\right)}\right) \cdot \left(\tan\left(\left(3^x+1\right)^2\right)\right)'}{2 \cdot \sqrt{\ln\left(\tan\left(\left(3^x+1\right)^2\right)\right)} \cdot \tan\left(\left(3^x+1\right)^2\right)}$$

# Aufgabe 20 II

$$= \frac{\cos\left(\sqrt{\ln\left(\tan\left(\left(3^x+1\right)^2\right)\right)}\right)\cdot\left(\left(3^x+1\right)^2\right)'}{2\cdot\sqrt{\ln\left(\tan\left(\left(3^x+1\right)^2\right)\right)}\cdot\tan\left(\left(3^x+1\right)^2\right)\cdot\cos^2\left(\left(3^x+1\right)^2\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\sqrt{\ln\left(\tan\left(\left(3^x+1\right)^2\right)\right)}\right)\cdot 2\cdot\left(3^x+1\right)\cdot\left(3^x+1\right)'}{2\cdot\sqrt{\ln\left(\tan\left(\left(3^x+1\right)^2\right)\right)}\cdot\tan\left(\left(3^x+1\right)^2\right)\cdot\cos^2\left(\left(3^x+1\right)^2\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\sqrt{\ln\left(\tan\left(\left(3^x+1\right)^2\right)\right)}\right)\cdot 2\cdot\left(3^x+1\right)\cdot 3^x\cdot\ln 3}{2\cdot\sqrt{\ln\left(\tan\left(\left(3^x+1\right)^2\right)\right)}\cdot\tan\left(\left(3^x+1\right)^2\right)\cdot\cos^2\left(\left(3^x+1\right)^2\right)}$$