

Tutorium: Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Bonusklausur am 24.06.2019
(Lösungen)

20. Juni 2019

Aufgabe 1

Als Grenzwert ergibt sich $a = -\frac{7}{6}$. Überprüfen mithilfe der Definition der Konvergenz ergibt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{-7n+5}{6n} - \left(-\frac{7}{6}\right) \right| &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \left| \frac{5}{6n} \right| &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \frac{5}{6n} &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \frac{5}{6\varepsilon} &< n \end{aligned}$$

Für alle $n > n_0 = \lceil \frac{5}{6\varepsilon} \rceil$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für ein beliebiges $\varepsilon > 0$.
Damit ist gezeigt, dass es sich bei $a = -\frac{7}{6}$ tatsächlich um den gesuchten Grenzwert handelt.

» 3

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 2

Als vermuteter Grenzwert ergibt sich $a = \frac{1}{4}$. Einsetzen in die Definition der Konvergenz:

$$\begin{aligned} \left| \frac{n^2}{4n^2-1} - \frac{1}{4} \right| &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \left| \frac{n^2 - (n^2 - \frac{1}{4})}{4n^2 - 1} \right| &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \left| \frac{\frac{1}{4}}{4n^2 - 1} \right| &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{4}}{4n^2 - 1} &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \frac{1}{16\varepsilon} + \frac{1}{4} &< n^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{16\varepsilon} + \frac{1}{4}} &< n \end{aligned}$$

Somit gilt die obige Aussage für alle $n > n_0 = \lceil \sqrt{\frac{1}{16\varepsilon} + \frac{1}{4}} \rceil$.

» 4

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

» 2

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 3

Aufgrund der Konvergenz der Folge (a_n) existiert ein Grenzwert a sowie für jedes $\varepsilon > 0$ ein Wert n_0 , so dass für $n, m > n_0$ gilt:

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2} \\ |a_m - a| &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Addition der Ungleichungen liefert

$$|a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Abschätzen mit der Dreiecksungleichung liefert das Cauchy-Kriterium:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

>> 5

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 5 I

Beweis der Beschränktheit:

Es ist zu zeigen, dass $1 \leq a_n \leq 2$ gilt.

(I) Induktionsanfang:

$$a_1 = 2 \geq 1 \quad \text{und} \quad a_1 = 2 \leq 2 \quad \checkmark$$

(II) Induktionsschritt:

Die Behauptung gelte für ein festes $n \in \mathbb{N}$. Es folgt:

$$a_{n+1} = \left(\frac{a_n}{4}\right)^2 + 1 = \frac{1}{16} \cdot a_n^2 + 1 \geq \frac{1}{16} \cdot 1^2 + 1 = \frac{17}{16} \geq 1. \quad \checkmark$$

$$a_{n+1} = \left(\frac{a_n}{4}\right)^2 + 1 = \frac{1}{16} \cdot a_n^2 + 1 \leq \frac{1}{16} \cdot 2^2 + 1 = \frac{5}{4} \leq 2. \quad \checkmark$$

Aus (I) und (II) folgt die Richtigkeit der Behauptung.

>> 7

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 4

Die Folge (x_n) ist monoton fallend; ihren größten Wert nimmt sie für $n = 1$ an, für $n \rightarrow \infty$ nähert sich (x_n) dem kleinsten Wert:

$$\limsup x_n = 3$$

$$\liminf x_n = 2.$$

Die Folge (y_n) ist monoton steigend; ihren kleinsten Wert nimmt sie für $n = 1$ an, für $n \rightarrow \infty$ nähert sich (y_n) dem größten Wert; $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ entspricht der Definition der Eulerschen Zahl e .

$$\limsup x_n = e$$

$$\liminf x_n = 2.$$

>> 6

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 5 II

Beweis der Monotonie:

Es ist zu zeigen, dass $a_{n+1} \leq a_n$ gilt.

(I) Induktionsanfang:

$$a_2 = \frac{5}{4} \leq 2 = a_1 \quad \checkmark$$

(II) Induktionsschritt:

Die Behauptung gelte für ein festes $n \in \mathbb{N}$. Es folgt:

$$a_{n+1} \leq a_n \stackrel{(\star)}{\Leftrightarrow} a_{n+1}^2 \leq a_n^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a_{n+1}}{4}\right)^2 + 1 \leq \left(\frac{a_n}{4}\right)^2 + 1 \Leftrightarrow a_{n+2} \leq a_{n+1}.$$

(\star) gilt wegen $a_n \geq 1$. Aus (I) und (II) folgt die Richtigkeit der Behauptung.

>> 8

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 6a-b

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-9n^4 + n^2 - 6n + 9}{4n^4 - 3n^3 - 27} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4 \left(-9 + \frac{1}{n^2} - \frac{6}{n} + \frac{9}{n^4} \right)}{n^4 \left(4 + \frac{3}{n} - \frac{27}{n^4} \right)} \right) = -\frac{9}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^3 - 12n^2 + 6}{-n^4 + 3n + 99} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 \left(5 - \frac{12}{n} + \frac{6}{n^3} \right)}{n^4 \left(-1 + \frac{3}{n^3} + \frac{99}{n^4} \right)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{-n} \right) = 0$$

>> 9

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 6d

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2 + n - 2}{2n^2 - 2} - \frac{18n^2 + 8n + 9}{4n^2 - 7} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 \left(5 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} \right)}{n^2 \left(2 - \frac{2}{n^2} \right)} - \frac{n^2 \left(18 + \frac{8}{n} + \frac{9}{n^2} \right)}{n^2 \left(4 - \frac{7}{n^2} \right)} \right) \\ &= \frac{5}{2} - \frac{9}{2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

>> 11

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 6c

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^6 + 3n^2 - 2} + 4n}{4n^2 + 7n - 28} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^6 \left(1 + \frac{3}{n^4} - \frac{2}{n^6} \right)} + 4n}{n^2 \left(4 + \frac{7}{n} - \frac{28}{n^2} \right)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^6} \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{n^4} - \frac{2}{n^6}} + 4n}{n^2 \left(4 + \frac{7}{n} - \frac{28}{n^2} \right)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n^4} - \frac{2}{n^6}} + \frac{4}{n^2} \right)}{n^2 \left(4 + \frac{7}{n} - \frac{28}{n^2} \right)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{4} \right) \\ &= \infty \end{aligned}$$

>> 10

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 6e

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 5n - 8}{6n + 1} + \frac{-2n^2 + 3n - 4}{4n - 7} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(4n - 7)(3n^2 + 5n - 8) + (6n + 1)(-2n^2 + 3n - 4)}{(6n + 1)(4n - 7)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{15n^2 + 88n + 52}{24n^2 - 38n - 7} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 \left(15 + \frac{88}{n} + \frac{52}{n^2} \right)}{n^2 \left(24 - \frac{38}{n} - \frac{7}{n^2} \right)} \right) \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

>> 12

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 7

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \left(\frac{\pi n^3 + 7n - 2}{4n^3 + n - 1} \right) \right) &= \cos \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi n^3 + 7n - 2}{4n^3 + n - 1} \right) \right) \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{16n^2 - n - 5}{9n^2 + 2n + 6}} &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{16n^2 - n - 5}{9n^2 + 2n + 6} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Die Stetigkeit der \cos - bzw. der $\sqrt{\quad}$ -Funktion wurde verwendet, um $\lim_{n \rightarrow \infty}$ in die jeweilige Funktionen zu ziehen.

» 13

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 9 I

In den Intervallen $(0, 2)$, $(2, 5)$ und $(5, 11)$ ist die Funktion stetig, da sie dort jeweils ein Polynom ist; diese sind auf ihrem Definitionsbereich immer stetig.

$$\begin{aligned}f(2) &= 6 \\ \lim_{x_n \rightarrow 2^-} (f(x_n)) &= \lim_{x_n \rightarrow 2^-} (x_n^2 + 2) = 6 \\ \lim_{x_n \rightarrow 2^+} (f(x_n)) &= \lim_{x_n \rightarrow 2^+} \left(-\frac{1}{2}x_n + 7 \right) = 6\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{x_n \rightarrow 2^-} (f(x_n)) = f(2) = \lim_{x_n \rightarrow 2^+} (f(x_n))$ ist f an der Stelle $x_0 = 2$ stetig.

» 15

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 8

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x^2 + 3x - 2}{x + 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 2}{1 + 2} \right) \\ &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2x^2 + 3x - 2}{x + 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{(2x - 1) \cdot (x + 2)}{x + 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (2x - 1) \\ &= -5\end{aligned}$$

Aufgabe 9 II

$$\begin{aligned}\lim_{x_n \rightarrow 5^-} (f(x_n)) &= \lim_{x_n \rightarrow 5^-} \left(-\frac{1}{2}x_n + 7 \right) = \frac{9}{2} \\ \lim_{x_n \rightarrow 5^+} (f(x_n)) &= \lim_{x_n \rightarrow 5^+} (x_n - 1) = 4\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{x_n \rightarrow 5^-} (f(x_n)) \neq \lim_{x_n \rightarrow 5^+} (f(x_n))$ ist f an der Stelle $x_0 = 5$ nicht stetig.

» 14

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

» 16

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 10 I

Aufgrund der Stetigkeit der beteiligten Funktionen und der Tatsache, dass die Nacheinanderausführung stetiger Funktionen wiederum stetig ist, ist f für $x \neq 0$ stetig. Es bleibt $x_0 = 0$ zu überprüfen.

Es sei $x_n = \frac{1}{(2\pi n)^2}$. Es gilt $(x_n) \rightarrow x_0$.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{5}{\sqrt{x_n}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{5}{\sqrt{\frac{1}{(2\pi n)^2}}}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(5 \cdot 2\pi n) = 1.\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f(x_0)$ ist f an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig.

» 17

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 11

Für $\varepsilon = 1$ muss die Ungleichung $|f(x) - f(x_0)| < 1$ gelten. Einsetzen von $x_0 = 2$ in $|f(x) - f(x_0)|$:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(2)| &= |x^2 + x - 2 - 2^2 - 2 + 2| \\ &= |x^2 + x - 6| \\ &= |(x+3)(x-2)| \\ &= |x+3| \cdot |x-2|\end{aligned}$$

Für $|x| < 3$ gilt $|x+3| < 6$ und folglich

$$|x+3| \cdot |x-2| < 6 \cdot |x-2|.$$

Gilt nun zusätzlich $|x-2| < \frac{1}{6}$, so folgt

$$|f(x) - f(2)| = |x+3| \cdot |x-2| < 6 \cdot |x-2| < 6 \cdot \frac{1}{6} = 1,$$

woraus $\delta = \frac{1}{6}$ als mögliche Lösung folgt.

» 19

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 10 II

Es gilt

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} \left(-(x_n)^2 \right) \leq \lim_{x_n \rightarrow 0} \left((x_n)^2 \cdot \cos\left(\frac{5}{\sqrt{x_n}}\right) \right) \leq \lim_{x_n \rightarrow 0} \left((x_n)^2 \right).$$

Hieraus folgt

$$0 \leq \lim_{x_n \rightarrow 0} \left((x_n)^2 \cdot \cos\left(\frac{5}{\sqrt{x_n}}\right) \right) \leq 0.$$

Nach dem Einschließungssatz folgt

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} \left((x_n)^2 \cdot \cos\left(\frac{5}{\sqrt{x_n}}\right) \right) = 0.$$

Wegen $\lim_{x_n \rightarrow 0} g(x_n) = g(x_0) = 0$ ist g an der Stelle $x_0 = 0$ stetig.

» 18

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 12 I

Es soll δ berechnet werden, so dass die folgende Ungleichung für einen Wert $x_0 > 0$ und ein $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}|f(x_0 + \delta) - f(x_0)| &< \varepsilon \\ |(x_0 + \delta)^2 + (x_0 + \delta) - 2 - (x_0^2 + x_0 - 2)| &< \varepsilon \\ |x_0^2 + 2x_0\delta + \delta^2 + x_0 + \delta - 2 - x_0^2 - x_0 + 2| &< \varepsilon \\ |2x_0\delta + \delta^2 + \delta| &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Für $x_0 > 0$ ist dieser Betrag positiv. Es folgt

$$\begin{aligned}2x_0\delta + \delta^2 + \delta &< \varepsilon \\ \delta^2 + (2x_0 + 1)\delta - \varepsilon &< 0.\end{aligned}$$

» 20

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 12 II

Lösen der quadratischen Gleichung $\delta^2 + (2x_0 + 1)\delta - \varepsilon = 0$ ergibt

$$\delta_{1/2} = -\frac{2x_0 + 1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2x_0 + 1}{2}\right)^2 + \varepsilon}.$$

Es handelt sich um eine nach oben geöffnete Parabel, d.h. die zugehörige Ungleichung $\delta^2 + (2x_0 + 1)\delta - \varepsilon < 0$ ist für

$$-\frac{2x_0 + 1}{2} - \sqrt{\left(\frac{2x_0 + 1}{2}\right)^2 + \varepsilon} < \delta < -\frac{2x_0 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{2x_0 + 1}{2}\right)^2 + \varepsilon}$$

erfüllt. Da per Definition $\delta > 0$ gelten muss, kann der Bereich der zulässigen δ -Werte wie folgt eingeschränkt werden:

$$0 < \delta < -\frac{2x_0 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{2x_0 + 1}{2}\right)^2 + \varepsilon}.$$

>> 21

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 14

Bestimmen des Grenzwerts des Differenzenquotienten für die Stelle x_0 :

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(2(x_0 + h))^2 - 5(x_0 + h) + 7}{h} - \frac{(2x_0^2 - 5x_0 + 7)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{2x_0^2 + 4x_0h + 2h^2 - 5x_0 - 5h + 7 - 2x_0^2 - 5x_0 + 7}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{4x_0h + 2h^2 - 5h}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (4x_0 + 2h - 5) \\ &= 4x_0 - 5 \end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich um denselben Anstieg, der auch mithilfe der Funktion $f'(x)$ für die Stelle x_0 ermittelt werden kann.

>> 23

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 13

Es ist zu überprüfen, ob der Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle $x_0 = \frac{12}{5}$ existiert.

Es sei $x_n = \frac{12}{5} + \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\left| \frac{5\left(\frac{12}{5} + \frac{1}{n}\right) - 12}{4} - \left| \frac{5 \cdot \frac{12}{5} - 12}{4} \right| \right|}{\frac{12}{5} + \frac{1}{n} - \frac{12}{5}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\left| \frac{5}{4} \right|}{\frac{1}{n}} \right) = \frac{5}{4}$$

Es sei $x_n = \frac{12}{5} - \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\left| \frac{5\left(\frac{12}{5} - \frac{1}{n}\right) - 12}{4} - \left| \frac{5 \cdot \frac{12}{5} - 12}{4} \right| \right|}{\frac{12}{5} - \frac{1}{n} - \frac{12}{5}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\left| \frac{-5}{4} \right|}{\frac{-1}{n}} \right) = -\frac{5}{4}$$

Der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert nicht, folglich ist die Funktion an der Stelle $x_0 = \frac{12}{5}$ nicht differenzierbar.

>> 22

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 15a I

Die Reziprokenregel kann direkt mithilfe des Grenzwerts des Differenzenquotienten hergeleitet werden. Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{v(x_0+h)} - \frac{1}{v(x_0)}}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{v(x_0) - v(x_0+h)}{v(x_0+h) \cdot v(x_0)}}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{v(x_0) - v(x_0+h)}{h \cdot v(x_0+h) \cdot v(x_0)} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{v(x_0+h) \cdot v(x_0)} \cdot \frac{v(x_0) - v(x_0+h)}{h} \right) \end{aligned}$$

>> 24

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 15a II

Anwendung der Rechenregeln für Grenzwerte und der Definition des Differenzenquotienten ergibt die Reziprokenregel:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{v(x_0+h) \cdot v(x_0)} \right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{v(x_0) - v(x_0+h)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{1}{v(x_0+h)} \right)}_{=\frac{1}{v(x_0)}} \cdot \frac{1}{v(x_0)} \cdot \left(- \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h} \right)}_{=v'(x_0)} \right) \\ &= - \frac{v'(x_0)}{(v(x_0))^2} \end{aligned}$$

» 25

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 16 I

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x \cdot \sin(x) \\ f_1'(x) &= [x]' \cdot \sin(x) + x \cdot [\sin(x)]' \\ &= \sin(x) + x \cdot \cos(x) \\ f_2(x) &= \sqrt{1+x^2} \\ f_2'(x) &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2+1}} \cdot [x^2+1]' \\ &= \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

» 27

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 15b

Herleitung der Quotientenregel mithilfe der Produktregel und der Reziprokenregel:

$$\begin{aligned} \left[\frac{u}{v} \right]' &= \left[u \cdot \frac{1}{v} \right]' \\ &= u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \left[\frac{1}{v} \right]' \\ &= u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \left(- \frac{v'}{v^2} \right) \\ &= \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} \\ &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}$$

» 26

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 16 II

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{3^x}{x} \\ f_3'(x) &= \frac{[3^x]' \cdot x - 3^x \cdot [x]'}{x^2} \\ &= \frac{3^x \cdot \ln 3 \cdot x - 3^x}{x^2} \end{aligned}$$

» 28

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 17

Es gilt $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} [\cot x]' &= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x. \end{aligned}$$

Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ folgt zudem

$$[\cot x]' = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

>> 29

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 19a

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin(4 \cdot x^5 - x^3 + 5 \cdot x^2 + x - 23) \\ f_1'(x) &= \cos(4 \cdot x^5 - x^3 + 5 \cdot x^2 + x - 23) \cdot (4 \cdot x^5 - x^3 + 5 \cdot x^2 + x - 23)' \\ &= \cos(4x^5 - x^3 + 5x^2 + x - 23) \cdot (20x^4 - 3x^2 + 10x + 1) \end{aligned}$$

>> 31

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 18

Es sei $\arctan x = y$ und somit $\tan y = x$. Gemäß der Umkehrregel gilt:

$$\begin{aligned} [\arctan x]' &= \frac{1}{[\tan y]'} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 y} \\ &= \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

>> 30

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 19b

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \sqrt{\tan(x)} \cdot \arctan(\ln(x)) \\ f_2'(x) &= \left[\sqrt{\tan(x)} \right]' \cdot \arctan(\ln(x)) + \sqrt{\tan(x)} \cdot [\arctan(\ln(x))]' \\ &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\tan(x)}} \cdot [\tan(x)]' \cdot \arctan(\ln(x)) + \sqrt{\tan(x)} \cdot \frac{1}{(\ln(x))^2 + 1} \cdot [\ln(x)]' \\ &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\tan(x)}} \cdot \frac{1}{\cos(x)^2} \cdot \arctan(\ln(x)) + \sqrt{\tan(x)} \cdot \frac{1}{(\ln(x))^2 + 1} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{\arctan(\ln(x))}{2 \cdot \sqrt{\tan(x)} \cdot (\cos(x))^2} + \frac{\sqrt{\tan(x)}}{x \cdot ((\ln(x))^2 + 1)} \end{aligned}$$

>> 32

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 19c

$$\begin{aligned}
 f_3(x) &= (\sin x)^{3x^2-x+3} = e^{\ln((\sin x)^{3x^2-x+3})} = e^{(3x^2-x+3) \cdot \ln(\sin x)} \\
 f_3'(x) &= e^{(3x^2-x+3) \cdot \ln(\sin x)} \cdot ((3x^2-x+3) \cdot \ln(\sin x))' \\
 &= [\dots] \cdot ((3x^2-x+3)' \cdot \ln(\sin x) + (3x^2-x+3) \cdot (\ln(\sin x))') \\
 &= [\dots] \cdot \left((6x-1) \cdot \ln(\sin x) + \frac{(3x^2-x+3) \cdot \cos x}{\sin x} \right) \\
 &= (\sin x)^{3x^2-x+3} \cdot ((6x-1) \cdot \ln(\sin x) + (3x^2-x+3) \cdot \cot x)
 \end{aligned}$$

» 33

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 20 I

$$\begin{aligned}
 f_3'(x) &= \cos\left(\sqrt{\ln(\tan((3^x+1)^2))}\right) \cdot \left(\sqrt{\ln(\tan((3^x+1)^2))}\right)' \\
 &= \frac{\cos\left(\sqrt{\ln(\tan((3^x+1)^2))}\right) \cdot (\ln(\tan((3^x+1)^2)))'}{2 \cdot \sqrt{\ln(\tan((3^x+1)^2))}} \\
 &= \frac{\cos\left(\sqrt{\ln(\tan((3^x+1)^2))}\right) \cdot (\tan((3^x+1)^2))'}{2 \cdot \sqrt{\ln(\tan((3^x+1)^2))} \cdot \tan((3^x+1)^2)}
 \end{aligned}$$

» 35

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 19d

$$\begin{aligned}
 f_4(x) &= x^e \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \log_2(x) \\
 f_4'(x) &= [x^e]' \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \log_2(x) + x^e \cdot [\cos(5 \cdot \sqrt{x})]' \cdot \log_2(x) + x^e \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot [\log_2(x)]' \\
 &= e \cdot x^{e-1} \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \log_2(x) + x^e \cdot (-\sin(5 \cdot \sqrt{x})) \cdot [5 \cdot \sqrt{x}]' \cdot \log_2(x) \\
 &\quad + x^e \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\ln(2) \cdot x} \\
 &= e \cdot x^{e-1} \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \log_2(x) + x^e \cdot (-\sin(5 \cdot \sqrt{x})) \cdot 5 \cdot [\sqrt{x}]' \cdot \log_2(x) \\
 &\quad + x^e \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\ln(2) \cdot x} \\
 &= e \cdot x^{e-1} \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \log_2(x) + x^e \cdot (-\sin(5 \cdot \sqrt{x})) \cdot 5 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot \log_2(x) \\
 &\quad + x^e \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\ln(2) \cdot x} \\
 &= e \cdot x^{e-1} \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \log_2(x) + \frac{-5 \cdot x^e \cdot \sin(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \log_2(x)}{2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{x^e \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x})}{\ln(2) \cdot x}
 \end{aligned}$$

» 34

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019

Aufgabe 20 II

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos\left(\sqrt{\ln(\tan((3^x+1)^2))}\right) \cdot ((3^x+1)^2)'}{2 \cdot \sqrt{\ln(\tan((3^x+1)^2))} \cdot \tan((3^x+1)^2) \cdot \cos^2((3^x+1)^2)} \\
 &= \frac{\cos\left(\sqrt{\ln(\tan((3^x+1)^2))}\right) \cdot 2 \cdot (3^x+1) \cdot (3^x+1)'}{2 \cdot \sqrt{\ln(\tan((3^x+1)^2))} \cdot \tan((3^x+1)^2) \cdot \cos^2((3^x+1)^2)} \\
 &= \frac{\cos\left(\sqrt{\ln(\tan((3^x+1)^2))}\right) \cdot 2 \cdot (3^x+1) \cdot 3^x \cdot \ln 3}{2 \cdot \sqrt{\ln(\tan((3^x+1)^2))} \cdot \tan((3^x+1)^2) \cdot \cos^2((3^x+1)^2)}
 \end{aligned}$$

» 36

© 2019 Steven Köhler

20. Juni 2019