Tutorium: Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Abschlussklausur am 17.07.2019 (Teil 1)

8. Juli 2019

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Wiederholungen zur Linearen Algebra

Vektorraum I

Gegeben seien eine Menge V, ein Körper $(K, +, \cdot)$, eine innere zweistellige Verknüpfung $\oplus : V \times V \to V$ (die Vektoraddition) sowie eine äußere zweistellige Verknüpfung $\odot : K \times V \to V$ (die skalare Multiplikation).

Man nennt $(V, \oplus, \odot)$ einen *Vektorraum über dem Körper* K (kurz: K*-Vektorraum*), wenn es sich bei $(V, \oplus)$ um eine abelsche Gruppe handelt und wenn für die skalare Multiplikation $\odot$ sowohl ein neutrales Element existiert als auch die „Assoziativ- und Distributivgesetze“ gelten.

Vektorraum II

- Die Vektoraddition $\oplus$ ist assoziativ. Für alle $u, v, w \in V$ gilt:
$$(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w) = u \oplus v \oplus w.$$
- Es existiert ein neutrales Element $0_V \in V$, so dass für alle $v \in V$ gilt:
$$v \oplus 0_V = 0_V \oplus v = v.$$
Das Element 0_V wird als *Nullvektor* bezeichnet.
- Zu jedem Element $v \in V$ existiert ein Element $-v$, für das gilt:
$$v \oplus (-v) = (-v) \oplus v = 0_V.$$
- Die Vektoraddition $\oplus$ ist kommutativ. Für alle $u, v \in V$ gilt:
$$u \oplus v = v \oplus u.$$

Vektorraum III

- Für alle $\lambda, \mu \in K$, $v \in V$ gilt (Assoziativgesetz):
$$(\lambda \cdot \mu) \odot v = \lambda \odot (\mu \odot v).$$
- Es existiert ein neutrales Element $1_K \in K$, so dass für alle $v \in V$ gilt:
$$1_K \odot v = v.$$
- Zusammen mit der Vektoraddition $\oplus$ gilt für alle $\lambda \in K$, $u, v \in V$ das Distributivgesetz:
$$\lambda \odot (u \oplus v) = (\lambda \odot u) \oplus (\lambda \odot v).$$
- Zusammen mit der Addition $+$ im Körper K gilt für alle $\lambda, \mu \in K$, $v \in V$ das Distributivgesetz:
$$(\lambda + \mu) \odot v = (\lambda \odot v) \oplus (\mu \odot v).$$

Untervektorraum

Gegeben sei ein Vektorraum $(V, +, \cdot)$ über einem Körper K. Man nennt eine Teilmenge $U \subseteq V$ genau dann einen *Untervektorraum* bzw. *Unterraum* von V, wenn U nichtleer und bezüglich der Vektoraddition $+$ und der skalaren Multiplikation $\cdot$ abgeschlossen ist, d.h., falls die folgenden Eigenschaften gelten:

- $U \neq \emptyset$;
- $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$;
- $u \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot u \in U$.

Aufgabe 1

Entscheide für die folgenden Mengen $U_1, \ldots, U_4$, ob es sich um einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ handelt:

a) $U_1 = \Big\{(x_1, x_2, x_3) \;\Big|\; x_1 + x_2 - 5x_3 \geq 0\Big\}$;

b) $U_2 = \Big\{(x_1, x_2, x_3) \;\Big|\; x_3 = 2x_1 - x_2\Big\}$;

c) $U_3 = \Big\{(x_1, x_2, x_3) \;\Big|\; x_3 = -x_1 + x_2 - 1\Big\}$;

d) $U_4 = \Big\{(x_1, x_2, x_3) \;\Big|\; x_1 = x_2 x_3\Big\}$.

Lineare Unabhängigkeit I

Gegeben sei ein Vektorraum V über einem Körper K. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen

- *linear abhängig*, wenn neben der trivialen Lösung

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0_K$$

noch mindestens eine weitere Lösung für die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0_V$$

existiert. In diesem Fall besitzen nicht alle Skalare λ_i den Wert 0_K. Gilt beispielsweise $\lambda_k \neq 0_K$, so kann durch Umstellen der Gleichung eine Linearkombination für den Vektor v_k gefunden werden:

$$v_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \cdot v_1 - \ldots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} \cdot v_{k-1} - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \cdot v_{k+1} - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \cdot v_n.$$

Lineare Unabhängigkeit II

Gegeben sei ein Vektorraum V über einem Körper K. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen

- *linear unabhängig*, wenn neben der trivialen Lösung

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0_K$$

keine weiteren Lösungen für die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0_V$$

existieren. In diesem Fall ist es nicht möglich, einen der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ als Linearkombination der anderen Vektoren darzustellen.

Aufgabe 2

Entscheide, ob die folgenden Polynome aus $\mathbb{R}[x]$ linear abhängig oder linear unabhängig sind:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^2 - x + 1 \\ p_2(x) &= 3x^2 - 2x + 2 \\ p_3(x) &= 11x^2 - 8x + 9 \end{aligned}$$

Basis

Gegeben seien ein Vektorraum V über einem Körper K sowie die Vektoren $b_1, \ldots, b_n \in V$.

Man nennt eine Teilmenge $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq V$ eine *Basis* des Vektorraums V, falls die folgenden Eigenschaften gelten:

- Die Vektoren $b_1, \ldots, b_n$ sind linear unabhängig.
- Die Vektoren $b_1, \ldots, b_n$ erzeugen den Vektorraum V. Für alle Elemente $v \in V$ existieren (eindeutig bestimmte) Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so dass gilt:

$$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n.$$

Basisergänzungssatz

Sei V ein K-Vektorraum, $M \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge und E ein Erzeugendensystem von V. Dann lässt sich M durch Elemente aus E zu einer Basis von V ergänzen.

Aufgabe 3

Gegeben seien die folgenden Vektoren des R^4:

$$v_1 = (1, 2, 0, 1)$$
$$v_2 = (2, 4, 1, 1)$$
$$v_3 = (5, 10, 2, 3)$$

a) Bestimme eine Basis von $V = \operatorname{Lin}(v_1, v_2, v_3)$.
b) Welche Dimension besitzt V?

Aufgabe 4

Gegeben sei die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ -3 & -8 & 19 \\ 3 & 6 & -14 \end{bmatrix}.$$

Bestimme, falls möglich, die zu A inverse Matrix A^{-1}. Falls die inverse Matrix nicht existiert, ist hierfür eine kurze Begründung anzugeben.

Aufgabe 5

Gegeben sei die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Bestimme $\det(A)$ durch Entwicklung nach der zweiten Spalte.
2. Bestimme $\det(A^{-1})$.

Lineare Abbildung

Gegeben seien zwei Vektorräume V und W über einem Körper K. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *lineare Abbildung*, wenn für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in K$ die folgenden Eigenschaften gelten:

- f ist *homogen*:
$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$
- f ist *additiv*:
$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Die beiden Bedingungen können zusammengefasst werden:

$$f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y)$$

Aufgabe 6

Gegeben seien eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sowie die Bilder der Basisvektoren $b_1 = (1, 2)$ und $b_2 = (0, -1)$ des $\mathbb{R}^2$. Es sei

$$\begin{aligned} f(b_1) &= f(1, 2) = (4, 2) \\ f(b_2) &= f(0, -1) = (-2, 0). \end{aligned}$$

Bestimme die zur linearen Abbildung f gehörende Abbildungsmatrix A.

Aufgabe 7

Zeige, dass das Bild einer linearen Abbildung $f : U \to V$ ein Unterraum von V ist

Wiederholungen zur Analysis

Definition der Konvergenz I

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen *konvergiert* gegen eine reelle Zahl a, wenn es für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert uneigentlich* (bzw. *divergiert bestimmt*) gegen $\pm\infty$, wenn es für jede reelle Zahl $r > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n > r$ (bzw. $a_n < r$) für alle $n > n_0$ gilt.

Cauchysches Konvergenzkriterium

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > n_0$ gilt.

Aufgabe 8

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_n = \frac{3n+6}{5n}$.

a) Bestimme den Grenzwert der Folge (a_n) für $n \to \infty$.

b) Überprüfe mithilfe der Definition der Konvergenz, ob es sich bei dem in a) gefundenen Wert tatsächlich um den Grenzwert der Folge (a_n) handelt.

Aufgabe 9

Bestimme den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\sqrt{81n^4 + n^2} - 3 + 5n}{4n^2 - n + 1}}$$

Funktionsgrenzwerte

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Betrachtet man den Grenzwert $\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n)$, also den Grenzwert des Funktionswerts für $x_n \to x_0$, so spricht man von einem *Funktionsgrenzwert*.

Der Funktionsgrenzwert $\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n)$ an der Stelle x_0 existiert genau dann, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ derselbe Grenzwert herauskommt.

Definition der Stetigkeit I

Es sei f eine reelle Funktion und $x_0 \in D_f$. Die Funktion f heißt *stetig an der Stelle* x_0, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D_f$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Die Funktion f heißt *stetig auf* X (für $X \subseteq D_f$), falls f an jeder Stelle $x_0 \in X$ stetig ist.

Definition der Stetigkeit II

Für jede stetige Funktion muss für alle $x_0 \in D_f$ insbesondere die folgende Eigenschaft gelten:

$$\lim_{x_n \to x_0^-} \Big(f(x_n) \Big) = f(x_0) = \lim_{x_n \to x_0^+} \Big(f(x_n) \Big).$$

ε, δ-Definition der Stetigkeit

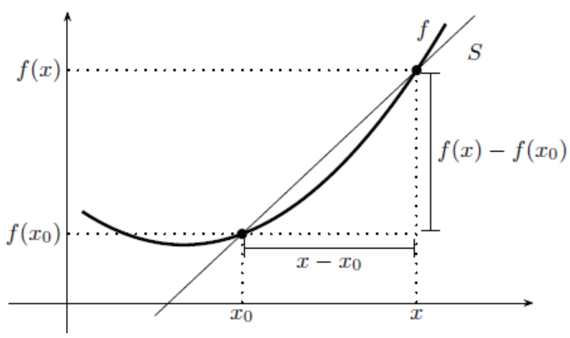
Es sei f eine reelle Funktion und $x_0 \in D_f$. Die Funktion f heißt stetig an der Stelle x_0, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\Big| f(x) - f(x_0) \Big| < \varepsilon$$

für alle $x \in D_f$ gilt, die $|x - x_0| < \delta$ erfüllen.

Differentialrechnung

Differenzenquotient



Der *Differenzenquotient* ist definiert als $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Definition der Differenzierbarkeit I

Die reelle Funktion f heißt *differenzierbar* an der Stelle $x_0 \in D_f$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x_n \to x_0} \left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right)$$

existiert. Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $f'(x_0)$ und nennen ihn die *Ableitung von f an der Stelle* x_0.

f heißt differenzierbar auf $X \subseteq D_f$, wenn f an jeder Stelle $x_0 \in X$ differenzierbar ist

Zu f lässt sich eine Funktion f' mit $D_{f'} = \left\{ x_0 \in D_f : f'(x_0) \text{ existiert} \right\}$ definieren, indem man jedem x_0 den Wert $f'(x_0)$ zuordnet. Die Funktion f' nennt man die *Ableitung von f*.

Definition der Differenzierbarkeit II

Oftmals wird auch folgende Definition der Differenzierbarkeit verwendet:

Die reelle Funktion f heißt *differenzierbar an der Stelle* $x_0 \in D_f$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

existiert. Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $f'(x_0)$ und nennen ihn *Ableitung von f an der Stelle* x_0.

Potenzfunktionen

$$\left[x^n\right]' = n \cdot x^{n-1}$$

Differentialrechnung

Exponentialfunktionen

$$\left[e^x\right]' = e^x$$

$$\left[a^x\right]' = a^x \cdot \ln a$$

Logarithmusfunktionen

$$\left[\ln x\right]' = \frac{1}{x}$$

$$\left[\log_a x\right]' = \frac{1}{\ln a \cdot x}$$

$$\left[\log_a x\right]' = \log_a e \cdot \frac{1}{x}$$

Wurzelfunktionen

$$\left[\sqrt{x}\right]' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$\left[\sqrt{x}\right]' = \left[x^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left[\sqrt[n]{x}\right]' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$\left[\sqrt[n]{x}\right]' = \left[x^{\frac{1}{n}}\right]' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$\left[\sqrt[n]{x^m}\right]' = \frac{m}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

$$\left[\sqrt[n]{x^m}\right]' = \left[x^{\frac{m}{n}}\right]' = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$$

Trigonometrische Funktionen I

$$\Big[\sin x\Big]' = \cos x \qquad \Big[\tan x\Big]' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Big[\cos x\Big]' = -\sin x \qquad \Big[\tan x\Big]' = 1 + \tan^2 x$$

$$\Big[-\sin x\Big]' = -\cos x \qquad \Big[\cot x\Big]' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$\Big[-\cos x\Big]' = \sin x \qquad \Big[\cot x\Big]' = -1 - \cot^2 x$$

Trigonometrische Funktionen II

$$\Big[\arcsin x\Big]' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\Big[\arccos x\Big]' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\Big[\arctan x\Big]' = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\Big[\operatorname{arccot} x\Big]' = \frac{-1}{x^2 + 1}$$

Hyperbolische Funktionen I

$$\left[\sinh x\right]' = \cosh x$$

$$\left[\cosh x\right]' = \sinh x$$

$$\left[\tanh x\right]' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\left[\tanh x\right]' = 1 - \tanh^2 x$$

$$\left[\coth x\right]' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$$

$$\left[\coth x\right]' = 1 - \coth^2 x$$

Hyperbolische Funktionen II

$$\left[\operatorname{arsinh} x\right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\left[\operatorname{arcosh} x\right]' = \frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}$$

$$\left[\operatorname{artanh} x\right]' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\left[\operatorname{arcoth} x\right]' = \frac{1}{1-x^2}$$

Ableitungsregeln

$$\Big[u \pm v\Big]' = u' \pm v' \qquad \text{(Summenregel)}$$

$$\Big[u \cdot v\Big]' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad \text{(Produktregel)}$$

$$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

$$\Big[u(v(x))\Big]' = u'\Big(v(x)\Big) \cdot v'(x) \qquad \text{(Kettenregel)}$$

$$\Big[u(x)^{v(x)}\Big]' = \Big[e^{v(x)\cdot\ln(u(x))}\Big]' \qquad \text{(Logarithmisches Differenzieren)}$$

Aufgabe 10

Bestimme die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f_1(x) = \sqrt{x^2+1} \cdot \tan(x)$

b) $f_2(x) = \sin(\cos(5^x))$

c) $f_3(x) = x^{\sin(x)}$

d) $f_4(x) = x^e \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \log_2 x$

Extremwerte

Lokales Maximum

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein *lokales Maximum*, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- Es gilt $f'(x_0) = 0$ sowie $f''(x_0) < 0$.
- Es gilt $f'(x_0) = 0$ und die Funktion f' besitzt an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von $+$ zu $-$.

Lokales Minimum

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein *lokales Minimum*, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- Es gilt $f'(x_0) = 0$ sowie $f''(x_0) > 0$.
- Es gilt $f'(x_0) = 0$ und die Funktion f' besitzt an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$.

Wendepunkt

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 einen *Wendepunkt*, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

- Es gilt $f''(x_0) = 0$ sowie $f'''(x_0) \neq 0$.
  - Gilt zudem $f'(x_0) = 0$, so handelt es sich um einen *Sattelpunkt*.
  - Gilt $f'''(x_0) < 0$, so liegt ein Übergang von konvexer zu konkaver Krümmung vor.
  - Gilt $f'''(x_0) > 0$, so liegt ein Übergang von konkaver zu konvexer Krümmung vor.

Aufgabe 11

Gegeben sei ein Zylinder mit der Oberfläche O. Bestimme den Radius r des Zylinders derart, dass das Volumen des Zylinders maximal wird.

Die Regeln von de l'Hospital

Die Regeln von de l'Hospital I

Der Typ $\frac{0}{0}$

Es sei I ein Intervall und $x_0 \in I$. Die Funktionen f und g seien für alle $x \in I$ mit $x \neq x_0$ differenzierbar. Es gelte $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, $x \neq x_0$. Ferner sei $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right),$$

falls der rechte Grenzwert existiert bzw. gleich $+\infty$ oder $-\infty$ ist.

Analog für $x \to \infty$.

Die Regeln von de l'Hospital II

Der Typ $\frac{\infty}{\infty}$

Es sei I ein Intervall und $x_0 \in I$. Die Funktionen f und g seien für alle $x \in I$ mit $x \neq x_0$ differenzierbar. Es gelte $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, $x \neq x_0$. Ferner sei $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$.

Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right),$$

falls der rechte Grenzwert existiert bzw. gleich $+\infty$ oder $-\infty$ ist.

Analog für $x \to \infty$.

Die Regeln von de l'Hospital III

Der Typ $0 \cdot \infty$

Es seien $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$ und $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$.

Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\right).$$

Die Regeln von de l'Hospital IV

Der Typ $\infty - \infty$

Es sei $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$.

Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}\right).$$

Die Regeln von de l'Hospital V

Die Typen 0^0, 1^∞ und ∞^0

- Typ 0^0: Es seien $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$ und $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = 0$.
- Typ 1^∞: Es seien $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 1$ und $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$.
- Typ ∞^0: Es seien $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \infty$ und $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = 0$.

Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x)^{g(x)} \right) = \lim_{x \to x_0} \left(e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \right) = e^{\lim\limits_{x \to x_0} \left(g(x) \cdot \ln f(x) \right)}$$

Aufgabe 12

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x^{\frac{1}{x}} \right)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{2}{x^2} \right)$

c) $\lim\limits_{x \to 5} \left(\frac{x^2 - 4x + 2}{2x + 4} \right)$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2^x - 1}{2 \cdot 3^{x+1}} \right)$

Aufgabe 13

Zeige, dass die Funktion $f(x) = a^x$ (für $a > 1$) schneller wächst als die Funktion $g(x) = x^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$).