

Tutorium: Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Abschlussklausur am 17.07.2019
(Teil 1)

8. Juli 2019

» 2

Wiederholungen zur Linearen Algebra

» 3

Wiederholungen zur Linearen Algebra

Vektorraum I

Gegeben seien eine Menge V , ein Körper $(K, +, \cdot)$, eine innere zweistellige Verknüpfung $\oplus : V \times V \rightarrow V$ (die Vektoraddition) sowie eine äußere zweistellige Verknüpfung $\odot : K \times V \rightarrow V$ (die skalare Multiplikation).

Man nennt (V, \oplus, \odot) einen *Vektorraum über dem Körper K* (kurz: *K -Vektorraum*), wenn es sich bei (V, \oplus) um eine abelsche Gruppe handelt und wenn für die skalare Multiplikation \odot sowohl ein neutrales Element existiert als auch die „Assoziativ- und Distributivgesetze“ gelten.

» 4

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Vektorraum II

- ▶ Die Vektoraddition \oplus ist assoziativ. Für alle $u, v, w \in V$ gilt:

$$(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w) = u \oplus v \oplus w.$$
- ▶ Es existiert ein neutrales Element $0_V \in V$, so dass für alle $v \in V$ gilt:

$$v \oplus 0_V = 0_V \oplus v = v.$$
- ▶ Das Element 0_V wird als *Nullvektor* bezeichnet.
- ▶ Zu jedem Element $v \in V$ existiert ein Element $-v$, für das gilt:

$$v \oplus (-v) = (-v) \oplus v = 0_V.$$
- ▶ Die Vektoraddition \oplus ist kommutativ. Für alle $u, v \in V$ gilt:

$$u \oplus v = v \oplus u.$$

>> 5

© 2019 Steven Köhler

8. Juli 2019

Untervektorraum

Gegeben sei ein Vektorraum $(V, +, \cdot)$ über einem Körper K . Man nennt eine Teilmenge $U \subseteq V$ genau dann einen *Untervektorraum* bzw. *Unterraum* von V , wenn U nichtleer und bezüglich der Vektoraddition $+$ und der skalaren Multiplikation \cdot abgeschlossen ist, d.h., falls die folgenden Eigenschaften gelten:

- ▶ $U \neq \emptyset$;
- ▶ $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$;
- ▶ $u \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot u \in U$.

>> 7

© 2019 Steven Köhler

8. Juli 2019

Vektorraum III

- ▶ Für alle $\lambda, \mu \in K, v \in V$ gilt (Assoziativgesetz):

$$(\lambda \cdot \mu) \odot v = \lambda \odot (\mu \odot v).$$
- ▶ Es existiert ein neutrales Element $1_K \in K$, so dass für alle $v \in V$ gilt:

$$1_K \odot v = v.$$
- ▶ Zusammen mit der Vektoraddition \oplus gilt für alle $\lambda \in K, u, v \in V$ das Distributivgesetz:

$$\lambda \odot (u \oplus v) = (\lambda \odot u) \oplus (\lambda \odot v).$$
- ▶ Zusammen mit der Addition $+$ im Körper K gilt für alle $\lambda, \mu \in K, v \in V$ das Distributivgesetz:

$$(\lambda + \mu) \odot v = (\lambda \odot v) \oplus (\mu \odot v).$$

>> 6

© 2019 Steven Köhler

8. Juli 2019

Aufgabe 1

Entscheide für die folgenden Mengen U_1, \dots, U_4 , ob es sich um einen Unterraum des \mathbb{R}^3 handelt:

- $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 - 5x_3 \geq 0\}$;
- $U_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 2x_1 - x_2\}$;
- $U_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = -x_1 + x_2 - 1\}$;
- $U_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_2 x_3\}$.

>> 8

© 2019 Steven Köhler

8. Juli 2019

Lineare Unabhängigkeit I

Gegeben sei ein Vektorraum V über einem Körper K . Die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ heißen

- ▶ *linear abhängig*, wenn neben der trivialen Lösung

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_K$$

noch mindestens eine weitere Lösung für die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$$

existiert. In diesem Fall besitzen nicht alle Skalare λ_i den Wert 0_K . Gilt beispielsweise $\lambda_k \neq 0_K$, so kann durch Umstellen der Gleichung eine Linearkombination für den Vektor v_k gefunden werden:

$$v_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \cdot v_1 - \dots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} \cdot v_{k-1} - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \cdot v_{k+1} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \cdot v_n.$$

Aufgabe 2

Entscheide, ob die folgenden Polynome aus $\mathbb{R}[x]$ linear abhängig oder linear unabhängig sind:

$$p_1(x) = x^2 - x + 1$$

$$p_2(x) = 3x^2 - 2x + 2$$

$$p_3(x) = 11x^2 - 8x + 9$$

Lineare Unabhängigkeit II

Gegeben sei ein Vektorraum V über einem Körper K . Die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ heißen

- ▶ *linear unabhängig*, wenn neben der trivialen Lösung

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_K$$

keine weiteren Lösungen für die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$$

existieren. In diesem Fall ist es nicht möglich, einen der Vektoren v_1, \dots, v_n als Linearkombination der anderen Vektoren darzustellen.

Basis

Gegeben seien ein Vektorraum V über einem Körper K sowie die Vektoren $b_1, \dots, b_n \in V$.

Man nennt eine Teilmenge $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq V$ eine *Basis* des Vektorraums V , falls die folgenden Eigenschaften gelten:

- ▶ Die Vektoren b_1, \dots, b_n sind linear unabhängig.
- ▶ Die Vektoren b_1, \dots, b_n erzeugen den Vektorraum V . Für alle Elemente $v \in V$ existieren (eindeutig bestimmte) Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so dass gilt:

$$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n.$$

Basisergänzungssatz

Sei V ein K -Vektorraum, $M \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge und E ein Erzeugendensystem von V . Dann lässt sich M durch Elemente aus E zu einer Basis von V ergänzen.

>> 13

© 2019 Steven Köhler

8. Juli 2019

Aufgabe 4

Gegeben sei die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ -3 & -8 & 19 \\ 3 & 6 & -14 \end{bmatrix}.$$

Bestimme, falls möglich, die zu A inverse Matrix A^{-1} . Falls die inverse Matrix nicht existiert, ist hierfür eine kurze Begründung anzugeben.

>> 15

© 2019 Steven Köhler

8. Juli 2019

Aufgabe 3

Gegeben seien die folgenden Vektoren des \mathbb{R}^4 :

$$v_1 = (1, 2, 0, 1)$$

$$v_2 = (2, 4, 1, 1)$$

$$v_3 = (5, 10, 2, 3)$$

- Bestimme eine Basis von $V = \text{Lin}(v_1, v_2, v_3)$.
- Welche Dimension besitzt V ?

>> 14

© 2019 Steven Köhler

8. Juli 2019

Aufgabe 5

Gegeben sei die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Bestimme $\det(A)$ durch Entwicklung nach der zweiten Spalte.
- Bestimme $\det(A^{-1})$.

>> 16

© 2019 Steven Köhler

8. Juli 2019

Lineare Abbildung

Gegeben seien zwei Vektorräume V und W über einem Körper K . Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ heißt *lineare Abbildung*, wenn für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in K$ die folgenden Eigenschaften gelten:

- ▶ f ist *homogen*:
$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$
- ▶ f ist *additiv*:
$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Die beiden Bedingungen können zusammengefasst werden:

$$f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y)$$

Aufgabe 7

Zeige, dass das Bild einer linearen Abbildung $f : U \rightarrow V$ ein Unterraum von V ist

Aufgabe 6

Gegeben seien eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sowie die Bilder der Basisvektoren $b_1 = (1, 2)$ und $b_2 = (0, -1)$ des \mathbb{R}^2 . Es sei

$$\begin{aligned} f(b_1) &= f(1, 2) = (4, 2) \\ f(b_2) &= f(0, -1) = (-2, 0). \end{aligned}$$

Bestimme die zur linearen Abbildung f gehörende Abbildungsmatrix A .

Wiederholungen zur Analysis

Definition der Konvergenz I

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen *konvergiert* gegen eine reelle Zahl a , wenn es für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt.

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergiert uneigentlich* (bzw. *divergiert bestimmt*) gegen $\pm\infty$, wenn es für jede reelle Zahl $r > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n > r$ (bzw. $a_n < r$) für alle $n > n_0$ gilt.

>> 21

© 2019 Steven Köhler

8. Juli 2019

Aufgabe 8

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_n = \frac{3n+6}{5n}$.

- Bestimme den Grenzwert der Folge (a_n) für $n \rightarrow \infty$.
- Überprüfe mithilfe der Definition der Konvergenz, ob es sich bei dem in a) gefundenen Wert tatsächlich um den Grenzwert der Folge (a_n) handelt.

>> 23

© 2019 Steven Köhler

8. Juli 2019

Cauchysches Konvergenzkriterium

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > n_0$ gilt.

>> 22

© 2019 Steven Köhler

8. Juli 2019

Aufgabe 9

Bestimme den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\sqrt{81n^4 + n^2} - 3 + 5n}{4n^2 - n + 1}}$$

>> 24

© 2019 Steven Köhler

8. Juli 2019

Funktionsgrenzwerte

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Betrachtet man den Grenzwert $\lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n)$, also den Grenzwert des Funktionswerts für $x_n \rightarrow x_0$, so spricht man von einem *Funktionsgrenzwert*.

Der Funktionsgrenzwert $\lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n)$ an der Stelle x_0 existiert genau dann, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ derselbe Grenzwert herauskommt.

>> 25

© 2019 Steven Köhler

8. Juli 2019

Definition der Stetigkeit II

Für jede stetige Funktion muss für alle $x_0 \in D_f$ insbesondere die folgende Eigenschaft gelten:

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0^-} \left(f(x_n) \right) = f(x_0) = \lim_{x_n \rightarrow x_0^+} \left(f(x_n) \right).$$

>> 27

© 2019 Steven Köhler

8. Juli 2019

Definition der Stetigkeit I

Es sei f eine reelle Funktion und $x_0 \in D_f$. Die Funktion f heißt *stetig an der Stelle* x_0 , wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D_f$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Die Funktion f heißt *stetig auf* X (für $X \subseteq D_f$), falls f an jeder Stelle $x_0 \in X$ stetig ist.

>> 26

© 2019 Steven Köhler

8. Juli 2019

ε, δ -Definition der Stetigkeit

Es sei f eine reelle Funktion und $x_0 \in D_f$. Die Funktion f heißt stetig an der Stelle x_0 , wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

für alle $x \in D_f$ gilt, die $|x - x_0| < \delta$ erfüllen.

>> 28

© 2019 Steven Köhler

8. Juli 2019

Definition der Differenzierbarkeit I

Die reelle Funktion f heißt *differenzierbar* an der Stelle $x_0 \in D_f$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right)$$

existiert. Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $f'(x_0)$ und nennen ihn die *Ableitung von f an der Stelle x_0* .

f heißt differenzierbar auf $X \subseteq D_f$, wenn f an jeder Stelle $x_0 \in X$ differenzierbar ist

Zu f lässt sich eine Funktion f' mit $D_{f'} = \{x_0 \in D_f : f'(x_0) \text{ existiert}\}$ definieren, indem man jedem x_0 den Wert $f'(x_0)$ zuordnet. Die Funktion f' nennt man die *Ableitung von f* .

>> 31

© 2019 Steven Köhler

8. Juli 2019

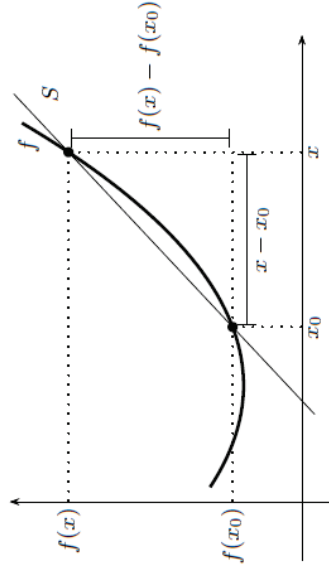
Differentialrechnung

>> 29

© 2019 Steven Köhler

8. Juli 2019

Differenzenquotient



Der *Differenzenquotient* ist definiert als $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

>> 30

© 2019 Steven Köhler

8. Juli 2019

Definition der Differenzierbarkeit II

Oftmals wird auch folgende Definition der Differenzierbarkeit verwendet:

Die reelle Funktion f heißt *differenzierbar an der Stelle $x_0 \in D_f$* , wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

existiert. Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $f'(x_0)$ und nennen ihn *Ableitung von f an der Stelle x_0* .

>> 32

© 2019 Steven Köhler

8. Juli 2019

Potenzfunktionen

$$[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$$

Logarithmusfunktionen

$$[\ln x]' = \frac{1}{x}$$

$$[\log_a x]' = \frac{1}{\ln a \cdot x}$$

$$[\log_a x]' = \log_a e \cdot \frac{1}{x}$$

Exponentialfunktionen

$$[e^x]' = e^x$$

$$[a^x]' = a^x \cdot \ln a$$

Wurzelfunktionen

$$[\sqrt{x}]' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$[\sqrt{x}]' = \left[x^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$[\sqrt[n]{x}]' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$[\sqrt[n]{x}]' = \left[x^{\frac{1}{n}} \right]' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$[\sqrt[n]{x^m}]' = \frac{m}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

$$[\sqrt[n]{x^m}]' = \left[x^{\frac{m}{n}} \right]' = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$$

Trigonometrische Funktionen I

$$[\sin x]' = \cos x$$

$$[\tan x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$[\cos x]' = -\sin x$$

$$[\tan x]' = 1 + \tan^2 x$$

$$[-\sin x]' = -\cos x$$

$$[\cot x]' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$[-\cos x]' = \sin x$$

$$[\cot x]' = -1 - \cot^2 x$$

Hyperbolische Funktionen I

$$[\tanh x]' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$[\sinh x]' = \cosh x$$

$$[\tanh x]' = 1 - \tanh^2 x$$

$$[\cosh x]' = \sinh x$$

$$[\coth x]' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$$

$$[\coth x]' = 1 - \coth^2 x$$

Trigonometrische Funktionen II

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[\arccos x]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[\arctan x]' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$[\operatorname{arccot} x]' = \frac{-1}{x^2+1}$$

Hyperbolische Funktionen II

$$[\operatorname{arsinh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$[\operatorname{arcosh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}$$

$$[\operatorname{artanh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$[\operatorname{arcoth} x]' = \frac{1}{1-x^2}$$

Ableitungsregeln

$$[u \pm v]' = u' \pm v' \quad (\text{Summenregel})$$

$$[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad (\text{Produktregel})$$

$$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (\text{Quotientenregel})$$

$$[u(v(x))]' = u'(v(x)) \cdot v'(x) \quad (\text{Kettenregel})$$

$$[u(x)^{v(x)}]' = [e^{v(x) \cdot \ln(u(x))}]' \quad (\text{Logarithmisches Differenzieren})$$

Extremwerte

Aufgabe 10

Bestimme die Ableitungen der folgenden Funktionen:

- $f_1(x) = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \tan(x)$
- $f_2(x) = \sin(\cos(5^x))$
- $f_3(x) = x^{\sin(x)}$
- $f_4(x) = x^e \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \log_2 x$

Lokales Maximum

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein *lokales Maximum*, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- ▶ Es gilt $f'(x_0) = 0$ sowie $f''(x_0) < 0$.
- ▶ Es gilt $f'(x_0) = 0$ und die Funktion f' besitzt an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von $+$ zu $-$.

Lokales Minimum

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein *lokales Minimum*, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- ▶ Es gilt $f''(x_0) = 0$ sowie $f''(x_0) > 0$.
- ▶ Es gilt $f'(x_0) = 0$ und die Funktion f' besitzt an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$.

Aufgabe 11

Gegeben sei ein Zylinder mit der Oberfläche O . Bestimme den Radius r des Zylinders derart, dass das Volumen des Zylinders maximal wird.

Wendepunkt

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 einen *Wendepunkt*, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

- ▶ Es gilt $f''(x_0) = 0$ sowie $f'''(x_0) \neq 0$.
 - ▶ Gilt zudem $f'(x_0) = 0$, so handelt es sich um einen *Sattelpunkt*.
 - ▶ Gilt $f'''(x_0) < 0$, so liegt ein Übergang von konvexer zu konkaver Krümmung vor.
 - ▶ Gilt $f'''(x_0) > 0$, so liegt ein Übergang von konkaver zu konvexer Krümmung vor.

Die Regeln von de l'Hospital

Die Regeln von de l'Hospital I

Der Typ $\frac{0}{0}$

Es sei I ein Intervall und $x_0 \in I$. Die Funktionen f und g seien für alle $x \in I$ mit $x \neq x_0$ differenzierbar. Es gelte $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, $x \neq x_0$. Ferner sei $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right),$$

falls der rechte Grenzwert existiert bzw. gleich $+\infty$ oder $-\infty$ ist.

Analog für $x \rightarrow \infty$.

>> 49

Die Regeln von de l'Hospital III

Der Typ $0 \cdot \infty$

Es seien $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$.

Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \right).$$

>> 51

Die Regeln von de l'Hospital II

Der Typ $\frac{\infty}{\infty}$

Es sei I ein Intervall und $x_0 \in I$. Die Funktionen f und g seien für alle $x \in I$ mit $x \neq x_0$ differenzierbar. Es gelte $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, $x \neq x_0$. Ferner sei $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| =$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty.$$

Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right),$$

falls der rechte Grenzwert existiert bzw. gleich $+\infty$ oder $-\infty$ ist.

Analog für $x \rightarrow \infty$.

>> 50

Die Regeln von de l'Hospital IV

Der Typ $\infty - \infty$

Es sei $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$.

Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x) - g(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}} \right).$$

>> 52

Die Regeln von de l'Hospital V

Die Typen 0^0 , 1^∞ und ∞^0

- ▶ Typ 0^0 : Es seien $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = 0$.
- ▶ Typ 1^∞ : Es seien $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$.
- ▶ Typ ∞^0 : Es seien $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = 0$.

Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (e^{g(x) \cdot \ln f(x)}) = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot \ln f(x))}$$

Aufgabe 13

Zeige, dass die Funktion $f(x) = a^x$ (für $a > 1$) schneller wächst als die Funktion $g(x) = x^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$).

Aufgabe 12

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^x} \right)$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x) - \frac{2}{x^2}} \right)$
- c) $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x^2 - 4x + 2}{2x + 4} \right)$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2^x - 1}{2 \cdot 3^{x+1}} \right)$