Tutorium: Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Abschlussklausur am 17.07.2019 (Teil 1, Lösungen)

8. Juli 2019

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1 I

a) U_1 ist kein Unterraum, da es nicht abgeschlossen bzgl. der skalaren Multiplikation ist. Es gilt z.B. $u = (1, 0, 0) \in U_1$, aber $-u = (-1, 0, 0) \notin U_1$.

b) $\rightarrow$ siehe nächste Folie

c) U_3 ist wegen $(0, 0, 0) \notin U_3$ kein Unterraum.

d) U_4 ist kein Unterraum, da es nicht abgeschlossen bzgl. der skalaren Multiplikation ist. Es gilt z.B. $u = (1, 1, 1) \in U_4$, aber $2u = (2, 2, 2) \notin U_4$.

Aufgabe 1 II

U_2 ist ein Unterraum.

(i) $U_2 \neq \emptyset$, da z.B. $0 \in U_2$ gilt.

(ii) Für $u, v \in U_2$ gilt $u + v \in U_2$.

$$
\begin{aligned}
u + v &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 2u_1 - u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 2v_1 - v_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ 2u_1 - u_2 + 2v_1 - v_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ 2(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) \end{pmatrix} \in U_2
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1 III

(iii) Für $u \in U_2$ gilt $\lambda u \in U_2$.

$$\begin{aligned}\lambda u = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 2u_1 - u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda(2u_1 - u_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ 2\lambda u_1 - \lambda u_2 \end{pmatrix} \in U_2\end{aligned}$$

Aufgabe 2 I

Zum Prüfen der linearen Unabhängigkeit der Polynome $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ muss die folgende Gleichung gelöst werden:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \cdot p_1(x) + \lambda_2 \cdot p_2(x) + \lambda_3 \cdot p_3(x) &= 0 \\
\lambda_1 \cdot \left(x^2 - x + 1\right) + \lambda_2 \cdot \left(3x^2 - 2x + 2\right) + \lambda_3 \cdot \left(11x^2 - 8x + 9\right) &= 0 \\
\left(\lambda_1 + 3\lambda_2 + 11\lambda_3\right) \cdot x^2 + \left(-\lambda_1 - 2\lambda_2 - 8\lambda_3\right) \cdot x + \left(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 9\lambda_3\right) &= 0
\end{aligned}$$

Zwei Polynome sing gleich, wenn ihre Koeffizienten gleich sind. Die obige Gleichung entspricht dem folgenden Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + 3\lambda_2 + 11\lambda_3 &= 0 \\
-\lambda_1 - 2\lambda_2 - 8\lambda_3 &= 0 \\
\lambda_1 + 2\lambda_2 + 9\lambda_3 &= 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 II

Lösen mit dem Gauß-(Jordan-)Verfahren ergibt:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Da neben der trivialen Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ keine weiteren Lösungen existieren, sind die Polynome $p_1(x)$, $p_2(x)$ und $p_3(x)$ linear unabhängig.

Aufgabe 3 I

Zunächst werden die Vektoren als Zeilen einer Matrix aufgeschrieben:

$$A = \begin{bmatrix} — & v_1 & — \\ — & v_2 & — \\ — & v_3 & — \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Diese wird nun in Zeilenstufenform überführt:

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & 0 & 1 & \\ 2 & 4 & 1 & 1 & \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\ 5 & 10 & 2 & 3 & \mathrm{III} - 5 \cdot \mathrm{I} \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & 2 & -2 & \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{II} \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Aufgabe 3 II

Alle Nichtnullzeilen der erhaltenen Matrix in Zeilenstufenform bilden die gesuchte Basis. Es gilt

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 I

Aufstellen der Blockmatrix $(A|E)$ und Überführen in reduzierte Zeilenstufenform:

$$
\begin{array}{rrr|rrr|l}
1 & 3 & -7 & 1 & 0 & 0 & \\
-3 & -8 & 19 & 0 & 1 & 0 & \mathrm{II} + 3 \cdot \mathrm{I} \\
3 & 6 & -14 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I} \\
\hline
1 & 3 & -7 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & \\
0 & -3 & 7 & -3 & 0 & 1 & \mathrm{III} + 3 \cdot \mathrm{II} \\
\hline
1 & 3 & -7 & 1 & 0 & 0 & \mathrm{I} + 7 \cdot \mathrm{III} \\
0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & \mathrm{II} + 2 \cdot \mathrm{III} \\
0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 1 & \\
\hline
1 & 3 & 0 & 43 & 21 & 7 & \mathrm{I} - 3 \cdot \mathrm{II} \\
0 & 1 & 0 & 15 & 7 & 2 & \\
0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & \\
0 & 1 & 0 & 15 & 7 & 2 & \\
0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 1 &
\end{array}
$$

Aufgabe 4 II

Die inverse Matrix kann nun an der letzten Zeile direkt abgelesen werden. Es gilt

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 15 & 7 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5a

Entwickeln nach der zweiten Spalte liefert

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Determinante der 3×3 Matrix kann nun z.B. mithilfe der Regel von Sarrus bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= 1 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) \cdot 3 + (1) \cdot 0 \cdot 1 \\ &\quad - (-1) \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt somit $\det A = 2 \cdot 5 = 10$.

Aufgabe 5b

Die Determinante der Matrix A^{-1} kann wie folgt berechnet werden:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{10}$$

Aufgabe 6 I

Zunächst müssen die Einheitsvektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden:

$$e_1 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$e_2 = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen der Koeffizienten liefert

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2 \quad \text{und} \quad \mu_1 = 0,\ \mu_2 = -1.$$

Aufgabe 6 II

Es folgt:

$$f(e_1) = f(b_1 + 2b_2) = f(b_1) + 2 \cdot f(b_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = f(-b2) = -f(b_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Abbildungsmatrix A erhält man, indem man die Bilder der Einheitsvektoren als Spalten der Abbildungsmatrix verwendet:

$$A = \begin{bmatrix} | & | \\ f(e_1) & f(e_2) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 7

Abgeschlossenheit bzgl. Addition:

Es sei $v_1, v_2 \in f(U)$. Dann existieren $u_1, u_2 \in U$ mit $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_2$. Da U ein Unterraum ist, gilt $u_1 + u_2 \in U$. Es folgt $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = v_1 + v_2 \in f(U)$.

Abgeschlossenheit bzgl. skalarer Multiplikation:

Es sei $v \in f(U)$ und $\lambda \in K$. Dann existiert ein $u \in U$ mit $f(u) = v$. Da U ein Unterraum ist, gilt $\lambda u \in U$. Es folgt $f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda v \in f(U)$.

Aufgabe 8

Als Grenzwert ergibt sich $a = \frac{3}{5}$. Überprüfen mithilfe der Definition der Konvergenz ergibt:

$$\begin{aligned} \left|\frac{3n+6}{5n} - \frac{3}{5}\right| &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \quad \left|\frac{6}{5n}\right| &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \quad \frac{6}{5n} &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \quad \frac{6}{5\varepsilon} &< n \end{aligned}$$

Für alle $n > n_0 = \left\lceil \frac{6}{5\varepsilon} \right\rceil$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Damit ist gezeigt, dass es sich bei $a = \frac{3}{5}$ tatsächlich um den gesuchten Grenzwert handelt.

Aufgabe 9

Aufgrund der Stetigkeit der Wurzelfunktion gilt

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\sqrt{81n^4+n^2-3}+5n}{4n^2-n+1}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{81n^4+n^2-3}+5n}{4n^2-n+1}}$$

Nun kann der Grenzwert unter der Wurzel berechnet werden:

$$\begin{aligned}\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{81n^4+n^2-3}+5n}{4n^2-n+1}} &= \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sqrt{81+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^4}}+5n}{4n^2-n+1}}\\ &= \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\sqrt{81+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^4}}+\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(4-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}\\ &= \sqrt{\frac{9}{4}}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 10a

$$f_1(x) = \sqrt{x^2+1} \cdot \tan(x)$$

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= \left[\sqrt{x^2+1}\right]' \cdot \tan(x) + \sqrt{x^2+1} \cdot [\tan(x)]' \\
&= \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2+1}} \cdot \left[x^2+1\right]'\right) \cdot \tan(x) + \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{(\cos(x))^2} \\
&= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2+1}} \cdot 2x \cdot \tan(x) + \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{(\cos(x))^2} \\
&= \frac{x \cdot \tan(x)}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{(\cos(x))^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 10b

$$
\begin{aligned}
f_2(x) &= \sin\left(\cos\left(5^x\right)\right) \\
f_2'(x) &= \cos\left(\cos\left(5^x\right)\right) \cdot \left[\cos\left(5^x\right)\right]' \\
&= \cos\left(\cos\left(5^x\right)\right) \cdot \left(-\sin\left(5^x\right)\right) \cdot \left[5^x\right]' \\
&= \cos\left(\cos\left(5^x\right)\right) \cdot \left(-\sin\left(5^x\right)\right) \cdot 5^x \cdot \ln\left(5\right) \\
&= -\cos\left(\cos\left(5^x\right)\right) \cdot \sin\left(5^x\right) \cdot 5^x \cdot \ln\left(5\right)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10c

$$
\begin{aligned}
f_3(x) &= x^{\sin(x)} = e^{\sin(x)\cdot\ln(x)} \\
f_3'(x) &= e^{\sin(x)\cdot\ln(x)} \cdot [\sin(x) \cdot \ln(x)]' \\
&= e^{\sin(x)\cdot\ln(x)} \cdot \left(\cos(x) \cdot \ln(x) + \sin(x) \cdot \frac{1}{x}\right) \\
&= x^{\sin(x)} \cdot \left(\cos(x) \cdot \ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}\right)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10d

$$
\begin{aligned}
f_4(x) &= x^e \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \log_2(x) \\
f_4'(x) &= \left[x^e\right]' \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \log_2(x) + x^e \cdot \left[\cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right)\right]' \cdot \log_2(x) + x^e \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot [\log_2(x)]' \\
&= e \cdot x^{e-1} \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \log_2(x) + x^e \cdot \left(-\sin\left(5 \cdot \sqrt{x}\right)\right) \cdot \left[5 \cdot \sqrt{x}\right]' \cdot \log_2(x) \\
&\quad + x^e \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{\ln(2) \cdot x} \\
&= e \cdot x^{e-1} \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \log_2(x) + x^e \cdot \left(-\sin\left(5 \cdot \sqrt{x}\right)\right) \cdot 5 \cdot \left[\sqrt{x}\right]' \cdot \log_2(x) \\
&\quad + x^e \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{\ln(2) \cdot x} \\
&= e \cdot x^{e-1} \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \log_2(x) + x^e \cdot \left(-\sin\left(5 \cdot \sqrt{x}\right)\right) \cdot 5 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot \log_2(x) \\
&\quad + x^e \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{\ln(2) \cdot x} \\
&= e \cdot x^{e-1} \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \log_2(x) + \frac{-5 \cdot x^e \cdot \sin\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \log_2(x)}{2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{x^e \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right)}{\ln(2) \cdot x}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 11 I

Zunächst werden die Formeln für die Oberfläche O und für das Volumen V eines Zylinders benötigt. Hierbei bezeichnet r den Radius des Zylinders und h dessen Höhe.

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$
$$V = \pi r^2 h$$

Umstellen der Formel für O nach h und Einsetzen in die Formel für das Volumen ergibt

$$h = \frac{O - 2\pi r^2}{2\pi r}$$
$$V = \pi r^2 \cdot \frac{O - 2\pi r^2}{2\pi r}$$
$$= \frac{r \cdot O}{2} - \pi r^3$$

Aufgabe 11 II

Ableiten von V nach r ergibt

$$V'(r) = \frac{O}{2} - 3\pi r^2.$$

Bestimmen der Nullstellen von $V'(r)$ liefert als einzige positive Nullstelle

$$r_0 = \sqrt{\frac{O}{6\pi}}.$$

Bestimmen der zweiten Ableitung:

$$V''(r) = -6\pi r.$$

Wegen $V''(r_0) < 0$ besitzt die Funktion $V(r)$ an der Stelle r_0 ein Maximum.

Aufgabe 12a

Umschreiben des Falls ∞^0, so dass die Regeln von de l'Hospital ($\star$) angewendet werden können:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right) = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)}$$

Berechnen von $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) \overset{(\star)}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Als Grenzwert ergibt sich:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)} = e^0 = 1.$$

Aufgabe 12b

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{2}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2\sin x}{x^2\sin x}\right)\\ &\overset{(\star)}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x-2\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x}\right)\\ &= \frac{2\cdot 0-2\cos 0}{2\cdot 0\cdot \sin 0+0^2\cdot\cos 0}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

Aufgabe 12c-d

c)

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{x^2-4x+2}{2x+4}\right)=\frac{5^2-4\cdot 5+2}{2\cdot 5+4}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$$

d)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2^x-1}{2\cdot 3^{x+1}}\right)\overset{(\star)}{=}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2^x\cdot\ln 2}{2\cdot 3^{x+1}\cdot\ln 3}\right)$$

$$=\frac{\ln 2}{2\cdot 3\cdot\ln 3}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2^x}{3^x}\right)$$

$$=\frac{\ln 2}{2\cdot 3\cdot\ln 3}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0$$

Aufgabe 13

Es muss der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a^x}{x^n}\right)$ berechnet werden. Es liegt der Fall $\frac{\infty}{\infty}$ vor. Mehrfaches Anwenden der Regeln von de l'Hospital $(\star)$ ergibt:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^x}{x^n}\right) \stackrel{(\star)}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^x\cdot\ln a}{n\cdot x^{n-1}}\right) \stackrel{(\star)}{=} \ldots \stackrel{(\star)}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^x\cdot(\ln a)^n}{n!}\right) = \infty.$$

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a^x}{x^n}\right) = \infty$ wächst die Funktion $f(x)$ schneller als die Funktion $g(x)$.