

Tutorium: Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Abschlussklausur am 17.07.2019
(Teil 1, Lösungen)

8. Juli 2019

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1 I

- a) U_1 ist kein Unterraum, da es nicht abgeschlossen bzgl. der skalaren Multiplikation ist. Es gilt z.B. $u = (1, 0, 0) \in U_1$, aber $-u = (-1, 0, 0) \notin U_1$.
- b) \rightarrow siehe nächste Folie
- c) U_3 ist wegen $(0, 0, 0) \notin U_3$ kein Unterraum.
- d) U_4 ist kein Unterraum, da es nicht abgeschlossen bzgl. der skalaren Multiplikation ist. Es gilt z.B. $u = (1, 1, 1) \in U_4$, aber $2u = (2, 2, 2) \notin U_4$.

Aufgabe 1 II

U_2 ist ein Unterraum.

- (i) $U_2 \neq \emptyset$, da z.B. $0 \in U_2$ gilt.
- (ii) Für $u, v \in U_2$ gilt $u + v \in U_2$.

$$\begin{aligned} u + v &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 2u_1 - u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 2v_1 - v_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ 2u_1 - u_2 + 2v_1 - v_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ 2(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) \end{pmatrix} \in U_2 \end{aligned}$$

Aufgabe 1 III

(iii) Für $u \in U_2$ gilt $\lambda u \in U_2$.

$$\begin{aligned}\lambda u &= \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 2u_1 - u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda(2u_1 - u_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ 2\lambda u_1 - \lambda u_2 \end{pmatrix} \in U_2\end{aligned}$$

Aufgabe 2 I

Zum Prüfen der linearen Unabhängigkeit der Polynome $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ muss die folgende Gleichung gelöst werden:

$$\begin{aligned}\lambda_1 \cdot p_1(x) + \lambda_2 \cdot p_2(x) + \lambda_3 \cdot p_3(x) &= 0 \\ \lambda_1 \cdot (x^2 - x + 1) + \lambda_2 \cdot (3x^2 - 2x + 2) + \lambda_3 \cdot (11x^2 - 8x + 9) &= 0 \\ (\lambda_1 + 3\lambda_2 + 11\lambda_3) \cdot x^2 + (-\lambda_1 - 2\lambda_2 - 8\lambda_3) \cdot x + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 9\lambda_3) &= 0\end{aligned}$$

Zwei Polynome sind gleich, wenn ihre Koeffizienten gleich sind. Die obige Gleichung entspricht dem folgenden Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}\lambda_1 + 3\lambda_2 + 11\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 - 8\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 9\lambda_3 &= 0\end{aligned}$$

Aufgabe 2 II

Lösen mit dem Gauß-(Jordan-)Verfahren ergibt:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Da neben der trivialen Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ keine weiteren Lösungen existieren, sind die Polynome $p_1(x)$, $p_2(x)$ und $p_3(x)$ linear unabhängig.

Aufgabe 3 I

Zunächst werden die Vektoren als Zeilen einer Matrix aufgeschrieben:

$$A = \begin{bmatrix} - & v_1 & - \\ - & v_2 & - \\ - & v_3 & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Diese wird nun in Zeilenstufenform überführt:

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & 0 & 1 & \\ 2 & 4 & 1 & 1 & \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ 5 & 10 & 2 & 3 & \text{III} - 5 \cdot \text{I} \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & 2 & -2 & \text{III} - 2 \cdot \text{II} \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Aufgabe 3 II

Alle Nichtnullzeilen der erhaltenen Matrix in Zeilenstufenform bilden die gesuchte Basis. Es gilt

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 I

Aufstellen der Blockmatrix $(A|E)$ und Überführen in reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{ccc|ccc|l} 1 & 3 & -7 & 1 & 0 & 0 & \\ -3 & -8 & 19 & 0 & 1 & 0 & \text{II} + 3 \cdot \text{I} \\ 3 & 6 & -14 & 0 & 0 & 1 & \text{III} - 3 \cdot \text{I} \\ \hline 1 & 3 & -7 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 0 & 1 & \text{III} + 3 \cdot \text{II} \\ \hline 1 & 3 & -7 & 1 & 0 & 0 & \text{I} + 7 \cdot \text{III} \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & \text{II} + 2 \cdot \text{III} \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 1 & \\ \hline 1 & 3 & 0 & 43 & 21 & 7 & \text{I} - 3 \cdot \text{II} \\ 0 & 1 & 0 & 15 & 7 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 15 & 7 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 1 & \end{array}$$

Aufgabe 4 II

Die inverse Matrix kann nun an der letzten Zeile direkt abgelesen werden. Es gilt

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 15 & 7 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5a

Entwickeln nach der zweiten Spalte liefert

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Determinante der 3×3 Matrix kann nun z.B. mithilfe der Regel von Sarrus bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= 1 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) \cdot 3 + (1) \cdot 0 \cdot 1 \\ &\quad - (-1) \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt somit $\det A = 2 \cdot 5 = 10$.

Aufgabe 5b

Die Determinante der Matrix A^{-1} kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}\det A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \\ &= \frac{1}{10}\end{aligned}$$

Aufgabe 6 I

Zunächst müssen die Einheitsvektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden:

$$\begin{aligned}e_1 &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ e_2 &= \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Bestimmen der Koeffizienten liefert

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \quad \text{und} \quad \mu_1 = 0, \mu_2 = -1.$$

Aufgabe 6 II

Es folgt:

$$f(e_1) = f(b_1 + 2b_2) = f(b_1) + 2 \cdot f(b_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = f(-b_2) = -f(b_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Abbildungsmatrix A erhält man, indem man die Bilder der Einheitsvektoren als Spalten der Abbildungsmatrix verwendet:

$$A = \begin{bmatrix} | & | \\ f(e_1) & f(e_2) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 7

Abgeschlossenheit bzgl. Addition:

Es sei $v_1, v_2 \in f(U)$. Dann existieren $u_1, u_2 \in U$ mit $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_2$. Da U ein Unterraum ist, gilt $u_1 + u_2 \in U$. Es folgt $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = v_1 + v_2 \in f(U)$.

Abgeschlossenheit bzgl. skalarer Multiplikation:

Es sei $v \in f(U)$ und $\lambda \in K$. Dann existiert ein $u \in U$ mit $f(u) = v$. Da U ein Unterraum ist, gilt $\lambda u \in U$. Es folgt $f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda v \in f(U)$.

Aufgabe 8

Als Grenzwert ergibt sich $a = \frac{3}{5}$. Überprüfen mithilfe der Definition der Konvergenz ergibt:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{3n+6}{5n} - \frac{3}{5} \right| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{6}{5n} \right| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \frac{6}{5n} < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \frac{6}{5\varepsilon} < n \end{aligned}$$

Für alle $n > n_0 = \left\lceil \frac{6}{5\varepsilon} \right\rceil$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Damit ist gezeigt, dass es sich bei $a = \frac{3}{5}$ tatsächlich um den gesuchten Grenzwert handelt.

Aufgabe 9

Aufgrund der Stetigkeit der Wurzelfunktion gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\sqrt{81n^4 + n^2 - 3} + 5n}{4n^2 - n + 1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{81n^4 + n^2 - 3} + 5n}{4n^2 - n + 1}}$$

Nun kann der Grenzwert unter der Wurzel berechnet werden:

$$\begin{aligned} \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{81n^4 + n^2 - 3} + 5n}{4n^2 - n + 1}} &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sqrt{81 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^4}} + 5n}{4n^2 - n + 1}} \\ &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\sqrt{81 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^4}} + \frac{5}{n} \right)}{n^2 \left(4 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4}} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 10a

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \tan(x)$$

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \left[\sqrt{x^2 + 1} \right]' \cdot \tan(x) + \sqrt{x^2 + 1} \cdot [\tan(x)]' \\ &= \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \cdot [x^2 + 1]' \right) \cdot \tan(x) + \sqrt{x^2 + 1} \cdot \frac{1}{(\cos(x))^2} \\ &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x \cdot \tan(x) + \sqrt{x^2 + 1} \cdot \frac{1}{(\cos(x))^2} \\ &= \frac{x \cdot \tan(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{(\cos(x))^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 10b

$$f_2(x) = \sin(\cos(5^x))$$

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \cos(\cos(5^x)) \cdot [\cos(5^x)]' \\ &= \cos(\cos(5^x)) \cdot (-\sin(5^x)) \cdot [5^x]' \\ &= \cos(\cos(5^x)) \cdot (-\sin(5^x)) \cdot 5^x \cdot \ln(5) \\ &= -\cos(\cos(5^x)) \cdot \sin(5^x) \cdot 5^x \cdot \ln(5) \end{aligned}$$

Aufgabe 10c

$$\begin{aligned}f_3(x) &= x^{\sin(x)} = e^{\sin(x) \cdot \ln(x)} \\f_3'(x) &= e^{\sin(x) \cdot \ln(x)} \cdot [\sin(x) \cdot \ln(x)]' \\&= e^{\sin(x) \cdot \ln(x)} \cdot \left(\cos(x) \cdot \ln(x) + \sin(x) \cdot \frac{1}{x} \right) \\&= x^{\sin(x)} \cdot \left(\cos(x) \cdot \ln(x) + \frac{\sin(x)}{x} \right)\end{aligned}$$

Aufgabe 10d

$$\begin{aligned}f_4(x) &= x^e \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \log_2(x) \\f_4'(x) &= [x^e]' \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \log_2(x) + x^e \cdot [\cos(5 \cdot \sqrt{x})]' \cdot \log_2(x) + x^e \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot [\log_2(x)]' \\&= e \cdot x^{e-1} \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \log_2(x) + x^e \cdot (-\sin(5 \cdot \sqrt{x})) \cdot [5 \cdot \sqrt{x}]' \cdot \log_2(x) \\&\quad + x^e \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\ln(2) \cdot x} \\&= e \cdot x^{e-1} \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \log_2(x) + x^e \cdot (-\sin(5 \cdot \sqrt{x})) \cdot 5 \cdot [\sqrt{x}]' \cdot \log_2(x) \\&\quad + x^e \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\ln(2) \cdot x} \\&= e \cdot x^{e-1} \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \log_2(x) + x^e \cdot (-\sin(5 \cdot \sqrt{x})) \cdot 5 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot \log_2(x) \\&\quad + x^e \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\ln(2) \cdot x} \\&= e \cdot x^{e-1} \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \log_2(x) + \frac{-5 \cdot x^e \cdot \sin(5 \cdot \sqrt{x}) \cdot \log_2(x)}{2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{x^e \cdot \cos(5 \cdot \sqrt{x})}{\ln(2) \cdot x}\end{aligned}$$

Aufgabe 11 I

Zunächst werden die Formeln für die Oberfläche O und für das Volumen V eines Zylinders benötigt. Hierbei bezeichnet r den Radius des Zylinders und h dessen Höhe.

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$V = \pi r^2 h$$

Umstellen der Formel für O nach h und Einsetzen in die Formel für das Volumen ergibt

$$\begin{aligned} h &= \frac{O - 2\pi r^2}{2\pi r} \\ V &= \pi r^2 \cdot \frac{O - 2\pi r^2}{2\pi r} \\ &= \frac{r \cdot O}{2} - \pi r^3 \end{aligned}$$

Aufgabe 11 II

Ableiten von V nach r ergibt

$$V'(r) = \frac{O}{2} - 3\pi r^2.$$

Bestimmen der Nullstellen von $V'(r)$ liefert als einzige positive Nullstelle

$$r_0 = \sqrt{\frac{O}{6\pi}}.$$

Bestimmen der zweiten Ableitung:

$$V''(r) = -6\pi r.$$

Wegen $V''(r_0) < 0$ besitzt die Funktion $V(r)$ an der Stelle r_0 ein Maximum.

Aufgabe 12a

Umschreiben des Falls ∞^0 , so dass die Regeln von de l'Hospital
(*) angewendet werden können:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{x} \ln x} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right)}$$

Berechnen von $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right)$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0.$$

Als Grenzwert ergibt sich:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^{\frac{1}{x}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right)} = e^0 = 1.$$

Aufgabe 12b

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{2}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 2 \sin x}{x^2 \sin x} \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x - 2 \cos x}{2x \sin x + x^2 \cos x} \right) \\ &= \frac{2 \cdot 0 - 2 \cos 0}{2 \cdot 0 \cdot \sin 0 + 0^2 \cdot \cos 0} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Aufgabe 12c-d

c)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x^2 - 4x + 2}{2x + 4} \right) = \frac{5^2 - 4 \cdot 5 + 2}{2 \cdot 5 + 4} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

d)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2^x - 1}{2 \cdot 3^{x+1}} \right) &\stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2^x \cdot \ln 2}{2 \cdot 3^{x+1} \cdot \ln 3} \right) \\ &= \frac{\ln 2}{2 \cdot 3 \cdot \ln 3} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2^x}{3^x} \right) \\ &= \frac{\ln 2}{2 \cdot 3 \cdot \ln 3} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^x = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 13

Es muss der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a^x}{x^n} \right)$ berechnet werden. Es liegt der Fall $\frac{\infty}{\infty}$ vor. Mehrfaches Anwenden der Regeln von de l'Hospital (*) ergibt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a^x}{x^n} \right) \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a^x \cdot \ln a}{n \cdot x^{n-1}} \right) \stackrel{(*)}{=} \dots \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a^x \cdot (\ln a)^n}{n!} \right) = \infty.$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a^x}{x^n} \right) = \infty$ wächst die Funktion $f(x)$ schneller als die Funktion $g(x)$.