Tutorium: Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Abschlussklausur am 17.07.2019
(Teil 2)

11. Juli 2019

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Wiederholungen

Aufgabe 1

Bestimme das Infimum und das Supremum der folgenden Menge:

$$A = \left\{ \frac{2}{|n-10|+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Aufgabe 2

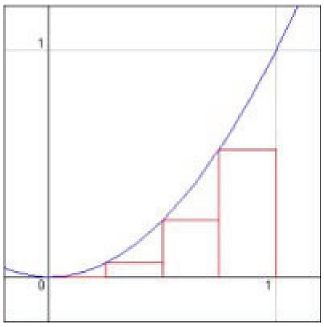
Bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, so dass die im Folgenden definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} 8a + 16x & , \text{falls } x < 2 \\ a^2(x+2) & , \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$$

Ober- und Untersummen

Ober- und Untersummen I

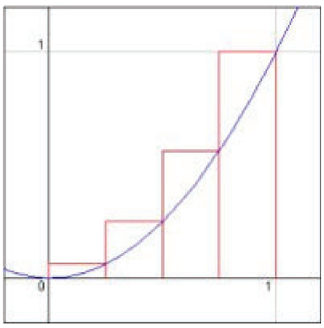
Untersumme



$$U_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

Ober- und Untersummen II

Obersumme



$$O_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

Ober- und Untersummen III

Das Integral ist der Grenzwert der Ober- bzw. Untersumme:

$$\int_a^b f(x) = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right)\right) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

$$\int_a^b f(x) = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right)\right) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Insbesondere gilt:

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} U_n$$

Aufgabe 3

Berechne die Fläche, die von der x-Achse, den beiden Geraden $x = 0$ und $x = 1$ sowie der Funktion $f(x)$ selbst eingeschlossen wird, mithilfe einer Obersumme:

$$f(x) = 2x^2 + x.$$

Überprüfe das Ergebnis mithilfe des entsprechenden bestimmten Integrals.

Einige Summenformeln

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} i &= \frac{n(n+1)}{2} \\
\sum_{i=0}^{n} i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
\sum_{i=0}^{n} i^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
\sum_{i=0}^{n} i^4 &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \\
\sum_{i=0}^{n} i^5 &= \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}
\end{aligned}
$$

Allgemeine Integrationsregeln

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung I

Der *Fundamentalsatz der Analysis*, auch bekannt als *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*, bringt die beiden grundlegenden Konzepte der Analysis miteinander in Verbindung, nämlich das der Integration und das der Differentiation. Er sagt aus, dass Ableiten bzw. Integrieren jeweils die Umkehrung des anderen ist. Der Satz besteht aus zwei Teilen, die manchmal als erster und zweiter Hauptsatz der Analysis bezeichnet werden.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung II

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine reellwertige stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, so ist für alle $x_0 \in [a, b]$ die Integralfunktion

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\ dt$$

differenzierbar und eine Stammfunktion von f, d. h., es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, dann gilt die Newton-Leibniz-Formel:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

Potenzen

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \, x^{n+1} + c$$

Wurzeln

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{x} + c$$

$$\int \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}} \, dx = \sqrt[n]{x} + c$$

$$\int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int \sqrt[m]{x^n} \, dx = \frac{m}{n+m} \, x^{\frac{n+m}{m}} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} \, dx = \frac{m}{m-n} \, x^{\frac{m-n}{m}} + c$$

Exponentialfunktionen

$$\int e^x \; dx = e^x + c$$

$$\int a^x \ln a \; dx = a^x + c$$

$$\int a^x \; dx = \frac{1}{\ln a} \; a^x + c$$

Logarithmen

$$\int \frac{1}{x} \; dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{\ln a \cdot x} \; dx = \log_a |x| + c$$

$$\int \log_a \mathrm{e} \cdot \frac{1}{x} \; dx = \log_a |x| + c$$

$$\int \ln x \; dx = x \cdot \ln x - x + c$$

$$\int \log_a x \; dx = \frac{1}{\ln a} \left(x \cdot \ln x - x \right) + c$$

Trigonometrische Funktionen I

$$\int \sin x \; dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \; dx = \sin x + c$$

$$\int -\sin x \; dx = \cos x + c$$

$$\int -\cos x \; dx = -\sin x + c$$

$$\int \tan x \; dx = -\ln\left|\cos x\right|$$

$$\int \cot x \; dx = \ln\left|\sin x\right|$$

Trigonometrische Funktionen II

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \; dx = \tan x + c$$

$$\int \left(1 + \tan^2 x\right) \; dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sin^2 x} \; dx = \cot x + c$$

$$\int \left(-1 - \cot^2 x\right) \; dx = \cot x + c$$

Trigonometrische Funktionen III

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\ dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{-1}{x^2+1}\ dx = \operatorname{arccot} x + c$$

Hyperbolische Funktionen I

$$\int \sinh x\ dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x\ dx = \sinh x + c$$

$$\int \tanh x\ dx = \ln\cosh x$$

$$\int \coth x\ dx = \ln\left|\sinh x\right|$$

Hyperbolische Funktionen II

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\, dx = \tanh x + c$$

$$\int \left(1 - \tanh^2 x\right)\, dx = \tanh x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sinh^2 x}\, dx = \coth x + c$$

$$\int \left(1 - \coth^2 x\right)\, dx = \coth x + c$$

Partielle Integration

Definition

Bei den Regeln zur *partiellen Integration* handelt es sich um Umkehrungen der Produktregel

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

Durch Integration beider Seiten der Gleichung erhält man:

$$\begin{aligned} \int (u \cdot v)' &= \int (u'v + uv') \\ uv &= \int u'v + \int uv' \end{aligned}$$

Anschließendes Umstellen ergibt die folgenden Regeln:

$$\begin{aligned} \int u'v &= uv - \int uv' \\ \int uv' &= uv - \int u'v \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Bestimme die folgenden Integrale mithilfe partieller Integration:

a) $\int x \cdot 3^x \; dx$

b) $\int x^2 \cdot \cos(x) \; dx$

c) $\int \sin x \cdot \cos x \; dx$

Integration durch Substitution

Definition I

Integration durch Substitution macht Verwendung von der Kettenregel:

$$\Big[F\big(g(x)\big)\Big]' = f\big(g(x)\big) \cdot g'(x).$$

Durch Integrieren ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int \Big[F\big(g(x)\big)\Big]' \, dx &= \int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x) \, dx \\ F\big(g(x)\big) &= \int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x) \, dx. \end{aligned}$$

© 2019 Steven Köhler

Definition II

Es sei f eine auf dem Intervall I stetige Funktion und es soll $\int f(x)\ dx$ berechnet werden. Für ein Intervall I' sei $g : I' \to I$ eine bijektive Funktion mit stetiger Ableitung. Dann lässt sich $\int f(x)\ dx$ berechnen, indem man

1. $\int f(g(t)) \cdot g'(t)\ dt$ ermittelt;
2. im Ergebnis $t = g^{-1}(x)$ substituiert („Resubstitution").

Formelmäßig drückt man dies häufig auch durch die folgende Schreibweise aus:

$$\int f(x)\ dx = \left[\int f(g(t)) \cdot g'(t)\ dt\right]_{t=g^{-1}(x)}$$

Aufgabe 5

Berechne die folgenden Integrale:

a) $\int e^{\sqrt{5x-2}}\ dx$

b) $\int x^2 \cdot \sin(2x^3)\ dx$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ dx$

d) $\int \sin(x) \cdot \cos(x)\ dx$

Tricks

Funktionen mit speziellem Aufbau I

Manchmal liegen Funktionen in der folgenden Form vor:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx.$$

Diese lassen sich direkt mit dem Logarithmus integrieren:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\left|f(x)\right|.$$

Funktionen mit speziellem Aufbau II

Manchmal liegen Funktionen in der folgenden Form vor:

$$\int f(x) \cdot f'(x)\ dx.$$

Diese lassen sich wie folgt direkt integrieren:

$$\int f(x) \cdot f'(x)\ dx = \frac{1}{2}\big(f(x)\big)^2.$$

Aufgabe 6

Berechne die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2+1}\ dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x}\ dx$

Konstante Faktoren und Summanden

Teilweise fehlt lediglich ein konstanter Faktor c, um eine Funktion direkt integrieren zu können. Dieser kann durch eine „Multiplikation mit 1“ leicht hinzugefügt werden:

$$\int f(x)\ dx = \int \frac{1}{c} \cdot c \cdot f(x)\ dx = \frac{1}{c} \int c \cdot f(x)\ dx.$$

Teilweise fehlt lediglich eine additive Konstante, um eine Funktion direkt integrieren zu können. Diese kann durch eine „Addition von 0“ leicht hinzugefügt werden:

$$\int f(x)\ dx = \int \big(f(x) + c - c\big)\ dx = \int \big(f(x) + c\big)\ dx - \int c\ dx.$$

Aufgabe 7

Bestimme das folgenden Integral: $\int e^{3x-5}\ dx.$

Bestimmte Integrale

Bestimme Integrale

Zur Berechnung der Fläche, die durch die x-Achse, die Funktion f und die beiden Geraden durch $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird, kann die Integralrechnung herangezogen werden. Es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

$F(x)$ ist hierbei eine Stammfunktion von $f(x)$.

Aufgabe 8

Berechne das folgende Integral:

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\ dx$$

Uneigentliche Integrale

Ist die Berechnung eines bestimmten Integrals nicht direkt möglich, da der Wert der Stammfunktion für eine der Integrationsgrenzen nicht berechnet werden kann, können Grenzwerte zu Hilfe genommen werden. Es gilt bspw.

$$\int_a^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\ dx.$$

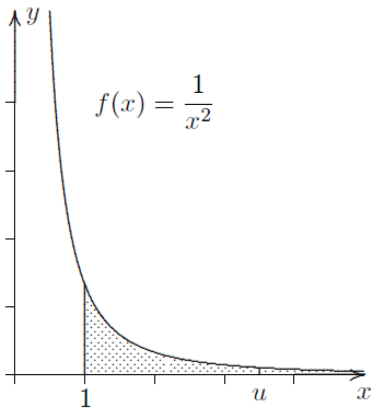
Aufgabe 9

Berechne die folgenden uneigentlichen Integrale:

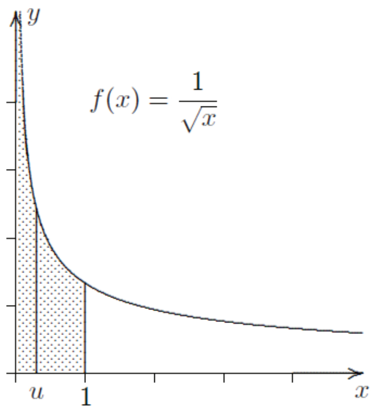
a) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$

b) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

Aufgabe 9 - Graphen I



Aufgabe 9 - Graphen II



Integration von rationalen Funktionen

Verfahren I

1. Schritt: Division mit Rest

Dieser Schritt ist nur notwendig, wenn der Grad des Zählers größer oder gleich dem Grad des Nenners ist.

2. Schritt: Faktorzerlegung des Nenners

Zerlegung des Nenners in die folgende Form:

$$c \cdot \left(x - a_1\right)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \left(x - a_r\right)^{\alpha_r} \cdot \left(Q_1(x)\right)^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot \left(Q_s(x)\right)^{\beta_s}$$

Hierbei gilt:

- $(x - a_i)$ sind *Linearfaktoren*, a_i Nullstellen des Nenners;
- $Q_i(x)$ sind quadratische Polynome ohne Nullstellen;
- α_i und β_i sind die *Vielfachheiten* der jeweiligen Terme.

Verfahren II

3. Schritt: Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{\alpha_1 - 1}} + \ldots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)} \\
&\quad \vdots \\
&+ \frac{A_{r1}}{(x-a_r)^{\alpha_r}} + \frac{A_{r2}}{(x-a_r)^{\alpha_r - 1}} + \ldots + \frac{A_{r\alpha_r}}{(x-a_r)} \\
&+ \frac{p_{11}x + q_{11}}{\left(Q_1(x)\right)^{\beta_1}} + \frac{p_{12}x + q_{12}}{\left(Q_1(x)\right)^{\beta_1 - 1}} + \ldots + \frac{p_{1\beta_1}x + q_{1\beta_1}}{Q_1(x)} \\
&\quad \vdots \\
&+ \frac{p_{s1}x + q_{s1}}{\left(Q_s(x)\right)^{\beta_s}} + \frac{p_{s2}x + q_{s2}}{\left(Q_s(x)\right)^{\beta_s - 1}} + \ldots + \frac{p_{s\beta_s}x + q_{s\beta_s}}{Q_s(x)}
\end{aligned}$$

Verfahren III

4. Schritt: Integration

Die Integration findet für jeden bei der Partialbruchzerlegung entstandenen Term separat statt; die Terme werden dabei in vielen Fällen auf die Ableitungen des Logarithmus oder des Arcustangens zurückgeführt.

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} = \int \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \int \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{\alpha_1 - 1}} + \ldots + \int \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)}$$

$$\vdots$$

$$+ \int \frac{p_{s1}x + q_{s1}}{\left(Q_s(x)\right)^{\beta_s}} + \int \frac{p_{s2}x + q_{s2}}{\left(Q_s(x)\right)^{\beta_s - 1}} + \ldots + \int \frac{p_{s\beta_s}x + q_{s\beta_s}}{Q_s(x)}$$

Aufgabe 10

Berechne das folgende Integral:

$$\int \frac{x+2}{x^2-1}\,dx$$