

Tutorium: Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Abschlussklausur am 17.07.2019
(Teil 2, Lösungen)

11. Juli 2019

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1

Der Wert eines Quotienten zweier natürlicher Zahlen wird umso größer, je größer der Zähler und je kleiner der Nenner wird; umgekehrt wird er umso kleiner, je kleiner der Zähler und je größer der Nenner wird. Da der Zähler konstant 2 ist, hängt es in diesem Fall nur vom Nenner ab. Für $n = 10$ ist dieser so klein wie möglich, für $n \rightarrow \infty$ strebt er gegen ∞ . Es folgt:

$$\liminf A = 0$$

$$\limsup A = 2.$$

Aufgabe 2

Damit die Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ stetig ist, darf sie dort keine Sprünge aufweisen. Es muss $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ gelten.

Umformen ergibt die folgende quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (8a + 16x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} a^2(x + 2) \\ 8a + 32 &= 4a^2 \\ a^2 - 2a - 8 &= 0\end{aligned}$$

Lösen (z.B. mit der p, q -Formel) ergibt die beiden Lösungen $a_1 = -2$ und $a_2 = 4$; für diese a ist die Funktion bei $x_0 = 2$ stetig.

Aufgabe 3 I

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} O_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(2\left(\frac{i}{n}\right)^2 + \left(\frac{i}{n}\right) \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n 2\left(\frac{i}{n}\right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right) \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n i \right)\end{aligned}$$

Aufgabe 3 II

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^3 + \dots}{6n^3} + \frac{n^2 + \dots}{2n^2} \right) \\ &= \frac{4}{6} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

Bestätigung mit dem bestimmten Integral:

$$\int_0^1 (2x^2 + x) dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{4}{6} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

Aufgabe 4a

$$\begin{aligned}\int x \cdot 3^x dx &= x \cdot 3^x \cdot \frac{1}{\ln 3} - \int 1 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} dx \\ &= x \cdot 3^x \cdot \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} \int 3^x dx \\ &= x \cdot 3^x \cdot \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{\ln 3} \cdot 3^x \\ &= \frac{3^x}{\ln 3} \cdot \left(x - \frac{1}{\ln 3} \right)\end{aligned}$$

Aufgabe 4b

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \cos x \, dx &= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx \\ &= x^2 \sin x - 2 \left(-x \cos x + \int \cos x \, dx \right) \\ &= x^2 \sin x - 2 \left(-x \cos x + \sin x \right) \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x\end{aligned}$$

Aufgabe 4c

Partielle Integration ergibt:

$$\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \sin x \cdot \sin x - \int \cos x \cdot \sin x \, dx.$$

Anschließendes Umstellen ergibt:

$$2 \int \sin x \cdot \cos x \, dx = \sin x \cdot \sin x$$
$$\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x.$$

Aufgabe 5a

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{5x-2}} dx &= \frac{2}{5} \int e^t \cdot t dt \\ &= \frac{2}{5} \left(e^t \cdot t - \int e^t dt \right) \\ &= \frac{2}{5} (e^t \cdot t - e^t) \\ &= \frac{2}{5} \left(e^{\sqrt{5x-2}} \cdot \sqrt{5x-2} - e^{\sqrt{5x-2}} \right)\end{aligned}$$

Es wurde mit $t = \sqrt{5x-2}$ substituiert. Symbolisches Rechnen ergibt in diesem Fall $dx = \frac{2}{5}t dt$.

Aufgabe 5b

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \sin(2x^3) dx &= \frac{1}{6} \int \sin t dt \\ &= -\frac{1}{6} \cos t \\ &= -\frac{1}{6} \cos(2x^3)\end{aligned}$$

Es wurde mit $t = 2x^3$ substituiert. Symbolisches Rechnen ergibt in diesem Fall $x^2 dx = \frac{1}{6} dt$.

Aufgabe 5c

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2x} dt \\ &= \int \frac{1}{2 \cdot \sqrt{t}} dt \\ &= \sqrt{t} \\ &= \sqrt{x^2 + 1}\end{aligned}$$

Es wurde mit $t = x^2 + 1$ substituiert. Symbolisches Rechnen ergibt in diesem Fall $dx = \frac{1}{2x} dt$.

Aufgabe 5d

$$\begin{aligned}\int \sin x \cdot \cos x \, dx &= \int t \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} \, dt \\ &= \int t \, dt \\ &= \frac{1}{2} t^2 \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 x\end{aligned}$$

Es wurde mit $t = \sin x$ substituiert. Symbolisches Rechnen ergibt in diesem Fall $dx = \frac{1}{\cos x} dt$.

Aufgabe 6

$$\int \frac{\arctan x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \arctan^2 x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x} dx = \ln |\arcsin x|$$

Aufgabe 7

$$\begin{aligned}\int e^{3x-5} dx &= \frac{1}{3} \int 3e^{3x-5} dx \\ &= \frac{1}{3} e^{3x-5}\end{aligned}$$

Aufgabe 8

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin(x) \, dx &= \left[-\cos(x) \right]_0^{2\pi} \\ &= -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) \\ &= 0\end{aligned}$$

Aufgabe 9

- a) Ersetzen der oberen Grenze durch b und Ausrechnen des Grenzwerts:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-x^{-1}]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (-b^{-1} - (-1^{-1})) = 1$$

Die Größe der eingeschlossenen Fläche ist 1.

- b) Ersetzen der unteren Grenze durch a und Ausrechnen des Grenzwerts:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{a}) = 2$$

Die Größe der eingeschlossenen Fläche ist 2.

Aufgabe 10

Der Grad des Zählerpolynoms ist kleiner als der Grad des Nennerpolynoms. Eine Polynomdivision ist nicht notwendig.

Partialbruchzerlegung für $\frac{x+2}{x^2-1}$:

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \dots = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{3}{2}}{x-1}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2-1} dx &= \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{3}{2}}{x-1} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln|x-1|\end{aligned}$$