Tutorium: Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Abschlussklausur am 17.07.2019 (Teil 2, Lösungen)

11. Juli 2019

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1

Der Wert eines Quotienten zweier natürlicher Zahlen wird umso größer, je größer der Zähler und je kleiner der Nenner wird; umgekehrt wird er umso kleiner, je kleiner der Zähler und je größer der Nenner wird. Da der Zähler konstant 2 ist, hängt es in diesem Fall nur vom Nenner ab. Für $n = 10$ ist dieser so klein wie möglich, für $n \to \infty$ strebt er gegen ∞. Es folgt:

$$\liminf A = 0$$
$$\limsup A = 2.$$

Aufgabe 2

Damit die Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ stetig ist, darf sie dort keine Sprünge aufweisen. Es muss $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ gelten. Umformen ergibt die folgende quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} f(x) \\
\lim_{x\to 2^-} (8a + 16x) &= \lim_{x\to 2^+} a^2(x+2) \\
8a + 32 &= 4a^2 \\
a^2 - 2a - 8 &= 0
\end{aligned}$$

Lösen (z.B. mit der p, q-Formel) ergibt die beiden Lösungen $a_1 = -2$ und $a_2 = 4$; für diese a ist die Funktion bei $x_0 = 2$ stetig.

Aufgabe 3 I

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} O_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(2\left(\frac{i}{n}\right)^2+\left(\frac{i}{n}\right)\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}2\left(\frac{i}{n}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n} i^2+\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} i\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 II

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^3+\dots}{6n^3}+\frac{n^2+\dots}{2n^2}\right)\\
&= \frac{4}{6}+\frac{1}{2} = \frac{7}{6}
\end{aligned}$$

Bestätigung mit dem bestimmten Integral:

$$\int_0^1 \left(2x^2+x\right)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{4}{6}+\frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

Aufgabe 4a

$$
\begin{aligned}
\int x \cdot 3^x \, dx &= x \cdot 3^x \cdot \frac{1}{\ln 3} - \int 1 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} \, dx \\
&= x \cdot 3^x \cdot \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} \int 3^x \, dx \\
&= x \cdot 3^x \cdot \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{\ln 3} \cdot 3^x \\
&= \frac{3^x}{\ln 3} \cdot \left(x - \frac{1}{\ln 3} \right)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4b

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \cdot \cos x \, dx &= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx \\
&= x^2 \sin x - 2 \left(-x \cos x + \int \cos x \, dx \right) \\
&= x^2 \sin x - 2 \Big(-x \cos x + \sin x \Big) \\
&= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin 5
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4c

Partielle Integration ergibt:

$$\int \sin x \cdot \cos x \; dx = \sin x \cdot \sin x - \int \cos x \cdot \sin x \; dx.$$

Anschließendes Umstellen ergibt:

$$\begin{aligned} 2\int \sin x \cdot \cos x \; dx &= \sin x \cdot \sin x \\ \int \sin x \cdot \cos x \; dx &= \frac{1}{2}\sin^2 x. \end{aligned}$$

Aufgabe 5a

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{5x-2}} \; dx &= \frac{2}{5}\int e^t \cdot t \; dt \\ &= \frac{2}{5}\left(e^t \cdot t - \int e^t \; dt\right) \\ &= \frac{2}{5}\left(e^t \cdot t - e^t\right) \\ &= \frac{2}{5}\left(e^{\sqrt{5x-2}} \cdot \sqrt{5x-2} - e^{\sqrt{5x-2}}\right) \end{aligned}$$

Es wurde mit $t = \sqrt{5x-2}$ substituiert. Symbolisches Rechnen ergibt in diesem Fall $dx = \frac{2}{5}t \; dt$.

Aufgabe 5b

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \sin\left(2x^3\right)\, dx &= \frac{1}{6}\int \sin t \ dt \\ &= -\frac{1}{6}\cos t \\ &= -\frac{1}{6}\cos\left(2x^3\right)\end{aligned}$$

Es wurde mit $t = 2x^3$ substituiert. Symbolisches Rechnen ergibt in diesem Fall $x^2\ dx = \frac{1}{6}\ dt$.

Aufgabe 5c

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ dx &= \int \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2x}\ dt \\ &= \int \frac{1}{2\cdot\sqrt{t}}\ dt \\ &= \sqrt{t} \\ &= \sqrt{x^2+1}\end{aligned}$$

Es wurde mit $t = x^2+1$ substituiert. Symbolisches Rechnen ergibt in diesem Fall $dx = \frac{1}{2x}\ dt$.

Aufgabe 5d

$$\begin{aligned}\int \sin x \cdot \cos x \; dx &= \int t \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} \; dt \\ &= \int t \; dt \\ &= \frac{1}{2} t^2 \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 x\end{aligned}$$

Es wurde mit $t = \sin x$ substituiert. Symbolisches Rechnen ergibt in diesem Fall $dx = \frac{1}{\cos x} \; dt$.

Aufgabe 6

$$\int \frac{\arctan x}{x^2+1} \; dx = \frac{1}{2} \arctan^2 x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x} \; dx = \ln \left| \arcsin x \right|$$

Aufgabe 7

$$\int e^{3x-5}\,dx = \frac{1}{3}\int 3e^{3x-5}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}e^{3x-5}$$

Aufgabe 8

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{2\pi}$$
$$= -\cos(2\pi) - (-\cos(0))$$
$$= 0$$

Aufgabe 9

a) Ersetzen der oberen Grenze durch b und Ausrechnen des Grenzwerts:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-x^{-1}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-b^{-1}-\left(-1^{-1}\right)\right) = 1$$

Die Größe der eingeschlossenen Fläche ist 1.

b) Ersetzen der unteren Grenze durch a und Ausrechnen des Grenzwerts:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0}\left(2\sqrt{1}-2\sqrt{a}\right) = 2$$

Die Größe der eingeschlossenen Fläche ist 2.

Aufgabe 10

Der Grad des Zählerpolynoms ist kleiner als der Grad des Nennerpolynoms. Eine Polynomdivision ist nicht notwendig.

Partialbruchzerlegung für $\frac{x+2}{x^2-1}$:

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \ldots = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{3}{2}}{x-1}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2-1}\,dx &= \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{3}{2}}{x-1}\right)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-1|\end{aligned}$$