Tutorium:
Analysis und Lineare Algebra

Teil 11

1. Juli 2022

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

© 2022 Steven Köhler

Ableitungsregeln

© 2022 Steven Köhler

Aufgaben

Aufgabe 1

Bestimme die Ableitung der folgenden Funktion $f(x)$.

$$f(x) = \left(\sinh\left(\log_7\left(5^x\right)\right)\right)^{\left(x^2+1\right)^2}$$

© 2022 Steven Köhler

Trigonometrische Funktionen

© 2022 Steven Köhler

Trigonometrische Funktionen I

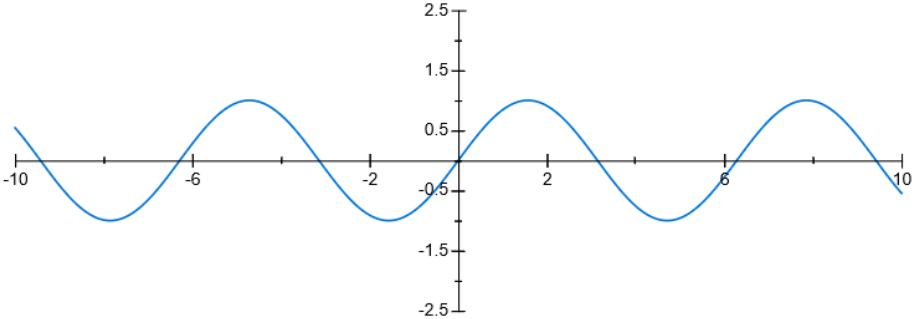
Zunächst einmal die Definitionen der *Sinus*- und *Cosinusfunktion*:

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$$

© 2022 Steven Köhler

Trigonometrische Funktionen II



Graph der Sinusfunktion $\sin x$

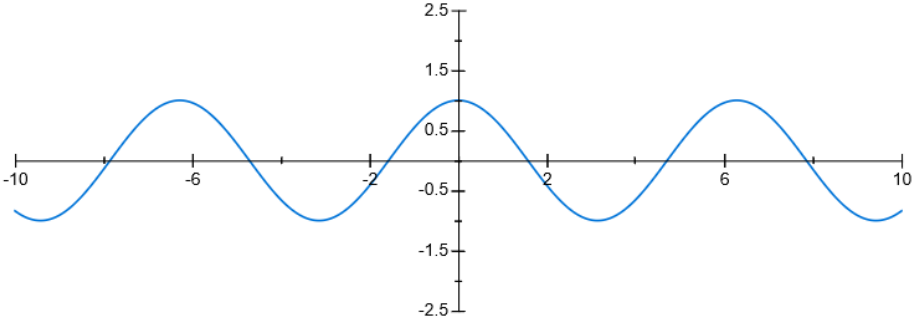
© 2022 Steven Köhler

Trigonometrische Funktionen III

Definitionsbereich	• $-\infty < x < \infty$
Wertebereich	• $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
Periodizität	• Periodisch mit Periodenlänge 2π • $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
Monotonie	• streng monoton steigend für $2n \cdot \pi \leq x \leq \left(2n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$ • streng monoton fallend für $\left(2n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi \leq x \leq \left(2n + \frac{3}{2}\right) \cdot \pi$ • streng monoton steigend für $\left(2n + \frac{3}{2}\right) \cdot \pi \leq x \leq (2n + 2) \cdot \pi$
Krümmung	• streng konkav für $2n \cdot \pi \leq x \leq (2n + 1) \cdot \pi$ • streng konvex für $(2n + 1) \cdot \pi \leq x \leq (2n + 2) \cdot \pi$
Symmetrien	• Punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung • ungerade Funktion
Asymptoten	• keine
Nullstellen	• $x = n \cdot \pi$
Sprungstellen	• keine
Polstellen	• keine
Extrema	• Minimum bei $x = \left(2n + \frac{3}{2}\right) \cdot \pi$ • Maximum bei $x = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$
Wendepunkte	• $x_1 = 2n \cdot \pi$ • $x_2 = (2n + 1) \cdot \pi$

© 2022 Steven Köhler

Trigonometrische Funktionen IV



Graph der Cosinusfunktion $\cos x$

© 2022 Steven Köhler

Trigonometrische Funktionen V

Definitionsbereich	• $-\infty < x < \infty$
Wertebereich	• $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
Periodizität	• Periodisch mit Periodenlänge 2π • $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
Monotonie	• streng monoton fallend für $2n \cdot \pi \leq x \leq (2n+1) \cdot \pi$ • streng monoton steigend für $(2n+1) \cdot \pi \leq x \leq (2n+2) \cdot \pi$
Krümmung	• streng konkav für $2n \cdot \pi \leq x \leq \left(2n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$ • streng konvex für $\left(2n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi \leq x \leq \left(2n + \frac{3}{2}\right) \cdot \pi$ • streng konkav für $\left(2n + \frac{3}{2}\right) \cdot \pi \leq x \leq (2n+2) \cdot \pi$
Symmetrien	• Achsensymmetrisch zur Ordinate • gerade Funktion
Asymptoten	• keine
Nullstellen	• $x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$
Sprungstellen	• keine
Polstellen	• keine
Extrema	• Maximum bei $x = 2n \cdot \pi$ • Minimum bei $x = (2n+1) \cdot \pi$
Wendepunkte	• $x_1 = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$ • $x_2 = \left(2n + \frac{3}{2}\right) \cdot \pi$

© 2022 Steven Köhler

Trigonometrische Funktionen VI

Und die Definitionen der *Tangens*- und *Cotangensfunktion*:

$$\begin{aligned} \tan : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan(x) \end{aligned}$$

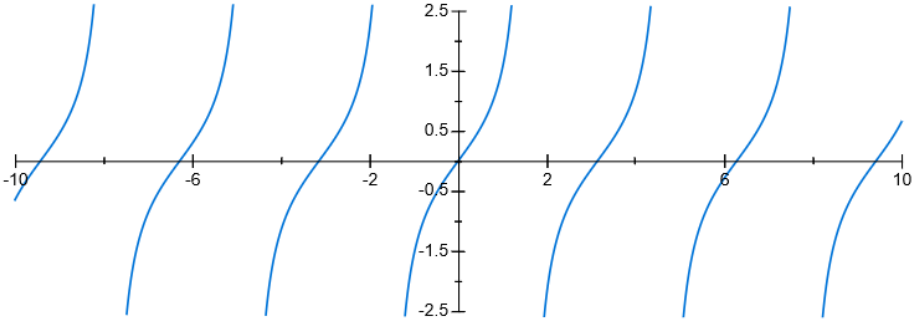
$$\begin{aligned} \cot : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cot(x) \end{aligned}$$

Es gilt

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{und} \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} \ .$$

© 2022 Steven Köhler

Trigonometrische Funktionen VII



Graph der Tangensfunktion $\tan x$

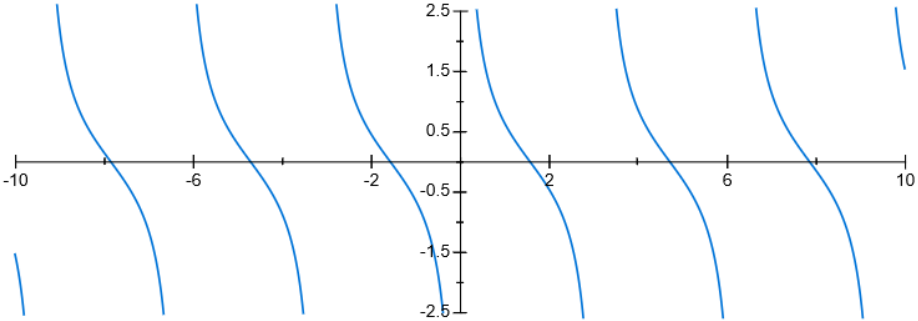
© 2022 Steven Köhler

Trigonometrische Funktionen VIII

Definitionsbereich	• $\mathbb{R} \setminus \left\{ k \cdot \pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
Wertebereich	• $\mathbb{R}$
Periodizität	• Periodisch mit Periodenlänge π • $\tan(x + \pi) = \tan(x)$
Monotonie	• streng monoton steigend in allen Intervallen
Krümmung	• streng konkav für $x \in \left(k \cdot \pi - \frac{\pi}{2},\ k \cdot \pi \right]$ • streng konvex für $x \in \left[k \cdot \pi,\ k \cdot \pi + \frac{\pi}{2} \right)$
Symmetrien	• Punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung • ungerade Funktion
Asymptoten	• Senkrechte Asymptoten bei den Polstellen
Nullstellen	• $x = k \cdot \pi$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)
Sprungstellen	• keine
Polstellen	• $x = k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)
Extrema	• keine
Wendepunkte	• $x = k \cdot \pi$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)

© 2022 Steven Köhler

Trigonometrische Funktionen IX



Graph der Cotangensfunktion $\cot x$

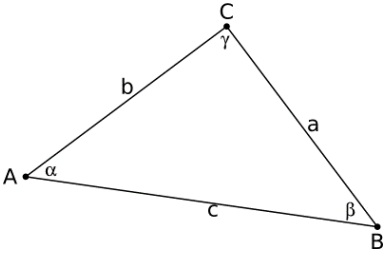
© 2022 Steven Köhler

Trigonometrische Funktionen X

Definitionsbereich	• $\mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
Wertebereich	• $\mathbb{R}$
Periodizität	• Periodisch mit Periodenlänge π • $\cot(x+\pi) = \cot(x)$
Monotonie	• streng monoton fallend in allen Intervallen
Krümmung	• streng konvex für $x \in \left(k \cdot \pi,\ k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right]$ • streng konkav für $x \in \left[k \cdot \pi + \frac{\pi}{2},\ (k+1) \cdot \pi\right)$
Symmetrien	• Punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung • ungerade Funktion
Asymptoten	• Senkrechte Asymptoten bei den Polstellen
Nullstellen	• $x = k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)
Sprungstellen	• keine
Polstellen	• $x = k \cdot \pi$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)
Extrema	• keine
Wendepunkte	• $x = k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)

© 2022 Steven Köhler

Geometrische Interpretation I

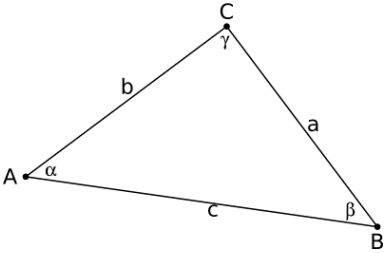


Im rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) gelten die folgenden Bezeichnungen (bezogen auf den Winkel α):

- a: *Gegenkathete*
- b: *Ankathete*
- c: *Hypotenuse*

© 2022 Steven Köhler

Geometrische Interpretation II



Im rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) gilt:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete des Winkels } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete des Winkels } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

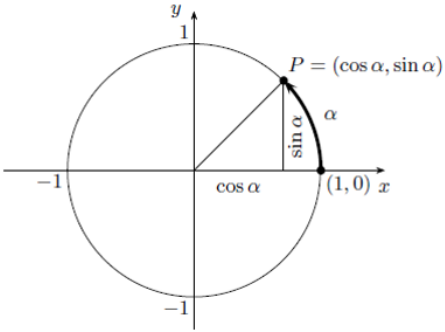
$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete des Winkels } \alpha}{\text{Ankathete des Winkels } \alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{Ankathete des Winkels } \alpha}{\text{Gegenkathete des Winkels } \alpha} = \frac{b}{a}$$

© 2022 Steven Köhler

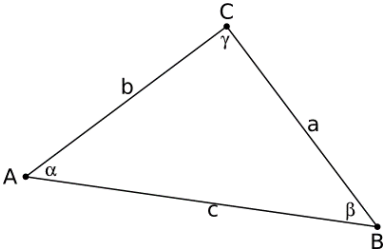
Geometrische Interpretation III

Interpretation am *Einheitskreis*:



© 2022 Steven Köhler

Satz des Pythagoras

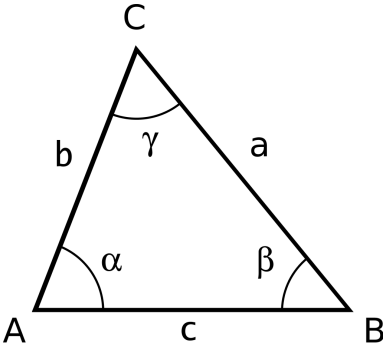


Im rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) gilt (*Satz des Pythagoras*):

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

© 2022 Steven Köhler

Kosinussatz



Für die drei Seiten a, b und c eines Dreiecks sowie für den der Seite c gegenüberliegenden Winkel γ gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma).$$

© 2022 Steven Köhler

Rechenregeln I

Für die Addition von (verschiedenen) Winkeln gelten die folgenden *Additionstheoreme*:

$$\sin\left(\alpha \pm \beta\right) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos\left(\alpha \pm \beta\right) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

Daraus ergeben sich beispielsweise die Rechenregeln für den doppelten Winkel:

$$\sin\left(2\alpha\right) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos\left(2\alpha\right) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

© 2022 Steven Köhler

Rechenregeln II

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist die folgende:

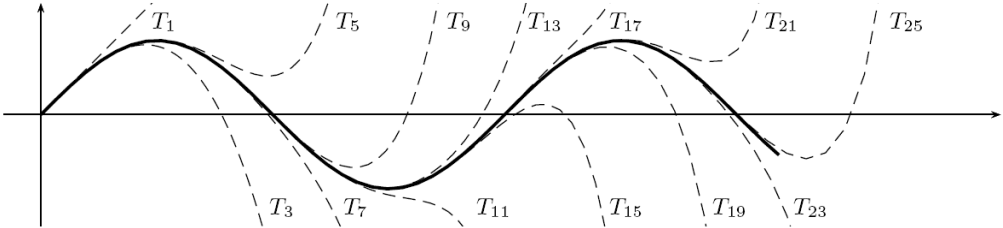
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Sie lässt sich einfach mithilfe des Satzes des Pythagoras am Einheitskreis beweisen.

© 2022 Steven Köhler

Taylorpolynom

Die Funktionswerte für einen beliebigen Winkel α können beispielsweise über *Taylorpolynome* näherungsweise berechnet werden.



Taylorpolynome T_1 bis T_{25} für $\sin x$

© 2022 Steven Köhler

Taylorreihe

Die Sinusfunktion lässt sich formal durch die folgende *Taylorreihe* beschreiben:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$

© 2022 Steven Köhler

Umkehrfunktionen

Zu jeder der besprochenen trigonometrischen Funktionen gibt es eine entsprechende Umkehrfunktion, die dem Seitenverhältnis wieder den Winkel zuordnet:

- arcsin: *Arcussinus*;
- arccos: *Arcuscosinus*;
- arctan: *Arcustangens*;
- arccot: *Arcuscotangens*.

© 2022 Steven Köhler

Aufgaben

Aufgabe 2

Bestimme die Ableitung der Funktion $f(x) = \sin x$.

© 2022 Steven Köhler

Aufgaben

Aufgabe 3

Bestimme die Ableitung der Funktion $f(x) = \arcsin x$.

© 2022 Steven Köhler

Extremwerte

© 2022 Steven Köhler

Lokales Maximum

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein *lokales Maximum*, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- Es gilt $f'(x_0) = 0$ sowie $f''(x_0) < 0$.
- Es gilt $f'(x_0) = 0$ und die Funktion f' besitzt an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von $+$ zu $-$.

© 2022 Steven Köhler

Lokales Minimum

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein *lokales Minimum*, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- Es gilt $f'(x_0) = 0$ sowie $f''(x_0) > 0$.
- Es gilt $f'(x_0) = 0$ und die Funktion f' besitzt an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$.

© 2022 Steven Köhler

Wendepunkte

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 einen *Wendepunkt*, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

- Es gilt $f''(x_0) = 0$ sowie $f'''(x_0) \neq 0$.
  - Gilt zudem $f'(x_0) = 0$, so handelt es sich um einen *Sattelpunkt*.
  - Gilt $f'''(x_0) < 0$, so liegt ein Übergang von konvexer zu konkaver Krümmung vor.
  - Gilt $f'''(x_0) > 0$, so liegt ein Übergang von konkaver zu konvexer Krümmung vor.

© 2022 Steven Köhler

Monotonie

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f ist an der Stelle x_0

- *monoton steigend*, falls $f'(x_0) \geq 0$ gilt;
- *streng monoton steigend*, falls $f'(x_0) > 0$ gilt;
- *monoton fallend*, falls $f'(x_0) \leq 0$ gilt;
- *streng monoton fallend*, falls $f'(x_0) < 0$ gilt.

© 2022 Steven Köhler

Krümmung

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f ist an der Stelle x_0

- *linksgekrümmt/konvex*, falls $f''(x_0) \geq 0$ gilt;
- *streng linksgekrümmt/konvex*, falls $f''(x_0) > 0$ gilt;
- *rechtsgekrümmt/konkav*, falls $f''(x_0) \leq 0$ gilt;
- *streng rechtsgekrümmt/konkav*, falls $f''(x_0) < 0$ gilt.

© 2022 Steven Köhler

Aufgaben

Aufgabe 4

Bestimme – falls vorhanden – die Extrempunkte der folgenden Funktion $f(x)$.

$$f(x) = \left(x^2 - 2x - 2\right)e^x - \frac{x^3}{3} + 4x$$

© 2022 Steven Köhler

Aufgaben

Aufgabe 5

Gegeben sei ein Zylinder mit der Oberfläche O. Bestimme den Radius r des Zylinders derart, dass das Volumen des Zylinders maximal wird.

© 2022 Steven Köhler