Tutorium:
Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Bonusklausur am 22.06.2023

16. Juni 2023

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Zeilenstufenform

Elementare Zeilenumformungen

Man kann Matrizen durch *elementare Zeilenumformungen* in eine andere Matrix überführen. Diese Umformungen sind:

- Vertauschen von zwei Zeilen;
- Multiplikation einer Zeile mit einer von Null verschiedenen Konstanten;
- Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Diese Operationen können kombiniert und beliebig oft wiederholt werden.

Elementare Spaltenumformungen I

Ebenso wie durch elementare Zeilenumformungen kann man eine Matrix durch *elementare Spaltenumformungen* in eine andere Matrix überführen. Diese Umformungen sind:

- Vertauschen von zwei Spalten;
- Multiplikation einer Spalte mit einer von Null verschiedenen Konstanten;
- Addition des Vielfachen einer Spalte zu einer anderen Spalte.

Diese Operationen können ebenfalls kombiniert und beliebig oft wiederholt werden.

Elementare Spaltenumformungen II

Generell sollten elementare Zeilen- und Spaltenumformungen nicht vermischt werden, da dies meist mehr Chaos als Nutzen bringt.

Wir werden uns im Folgenden ausschließlich mit elementaren Zeilenumformungen beschäftigen.

Sollten einmal Umformungen der Spalten notwendig sein, werden wir die zugehörige Matrix zunächst transponieren und anschließend die Zeilen der transponierten Matrix umformen.

Zeilenstufenform

Durch elementare Zeilenumformungen kann man jede Matrix in die sogenannte *Zeilenstufenform* bringen. Diese erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Alle Zeilen, die nur Nullen enthalten (*Nullzeilen*), stehen in der Matrix ganz unten.
- Wenn eine Zeile nicht nur aus Nullen besteht, so ist die erste von Null verschiedene Zahl eine Eins. Sie wird als *führende Eins* bezeichnet.
- In zwei aufeinanderfolgenden Zeilen, die von Null verschiedene Elemente besitzen, steht die führende Eins in der unteren Zeile stets weiter rechts als in der oberen Zeile.

Reduzierte Zeilenstufenform

Besitzt die Matrix Zeilenstufenform und gilt zusätzlich noch die folgende Eigenschaft, so liegt die Matrix in *reduzierter Zeilenstufenform* vor.

- Eine Spalte, die eine führende Eins enthält, hat keine weiteren von Null verschiedenen Einträge.

Gauß-Jordan-Algorithmus I

1. Bestimme die am weitesten links stehende Spalte der Matrix, die von Null verschiedene Werte enthält.
2. Ist der oberste Eintrag der gefundenen Spalte eine Null, so vertausche die oberste Zeile mit einer geeigneten Zeile, die in dieser Spalte keine Null enthält.
3. In der betrachteten Spalte ist nun der oberste Eintrag ein von Null verschiedenes Körperelement a. Multipliziere die erste Zeile der Matrix mit dem Inversen a^{-1} und erzeuge so eine führende Eins.

Gauß-Jordan-Algorithmus II

4. Addiere das jeweils passende Vielfache der aktuellen Zeile zu den anderen Zeilen, so dass alle Einträge unterhalb der führenden Eins der aktuellen Zeile zu Null werden.
5. Wende die Schritte 1-4 auf die Matrix an, die man durch Streichen der aktuellen Zeile erhält und iteriere das Verfahren bis die Matrix Zeilenstufenform hat.
6. Mit der letzten nicht verschwindenden Zeile beginnend, addiere geeignete Vielfache der unteren Zeilen zu den darüber liegenden Zeilen, um über den führenden Einsen Nullen zu erzeugen.

Gauß-Jordan-Algorithmus III

Aufgabe 1

Überführe die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ in Zeilenstufenform sowie in reduzierte Zeilenstufenform!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -2 & -4 & -8 \\ -3 & -9 & -17 \end{bmatrix}$$

Gauß-Jordan-Algorithmus IV

Aufgabe 2

Überführe die folgende Matrix $B \in \mathbb{Z}_7^{3\times 3}$ in Zeilenstufenform.

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

Definition

Als *lineare Gleichungssysteme* bezeichnet man in der linearen Algebra Gleichungssysteme der folgenden Art:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem besteht dabei aus m Gleichungen mit n Unbekannten.

Darstellungsformen I

Es existieren verschiedene Darstellungsformen für lineare Gleichungssysteme:

- die *explizite Form*;
- die *Matrixform*;
- die *Spaltenform* (oder auch *Vektorform*).

Darstellungsformen II

Die explizite Form:

Bei dieser Form wird das Gleichungssystem als eine Menge von m separaten Gleichungen mit n Unbekannten angegeben.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Darstellungsformen III

Die Matrixform:

Bei dieser Form wird das Gleichungssystem als Produkt einer Koeffizientenmatrix A, einem Spaltenvektor x mit den Unbekannten sowie einem Lösungsvektor b angegeben.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Die Gleichung lässt sich auch in der folgenden kompakten Form schreiben:

$$Ax = b.$$

Darstellungsformen IV

Die Spaltenform:

Bei dieser Form wird das Gleichungssystem als Summe der Produkte der Unbekannten mit den Spaltenvektoren der Matrix A sowie einem Lösungsvektor b angegeben:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Verwendet man für die Spalten die Schreibweise a_i, so ergibt sich die folgende kompakte Schreibweise:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = b.$$

Gauß-Verfahren I

Das *Gauß-Verfahren* bietet eine einfache Möglichkeit, lineare Gleichungssysteme zu lösen. Es basiert auf der Matrixform des Gleichungssystems.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Gauß-Verfahren II

Für die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ sind nur die Koeffizientenmatrix A sowie der Lösungsvektor b von Interesse.

Diese fasst man in der sogenannten *erweiterten Koeffizientenmatrix* zusammen:

$$\left[A\middle|b\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Gauß-Verfahren III

Das Gauß-Verfahren basiert auf der Grundidee, zunächst die erweiterte Koeffizientenmatrix durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform zu überführen und anschließend durch Rückwärtseinsetzen schrittweise die Lösung zu bestimmen.

Wichtig: Durch elementare Spaltenumformungen kann sehr leicht die Lösungsmenge des Gleichungssystems verändert werden. Aus diesem Grund sind diese beim Lösen linearer Gleichungssysteme mit dem Gauß-(Jordan-)Verfahren **verboten**!

Gauß-Jordan-Verfahren

Beim Gauß-Jordan-Verfahren wird die Matrix in *reduzierte Zeilenstufenform* gebracht, d.h., außer den führenden Einsen enthält die Matrix A in der erweiterten Koeffizientenmatrix $\left[A|b\right]$ nur Nullen.

In dieser Darstellungsform kann das Ergebnis deutlich einfacher ohne Rückwärtseinsetzen abgelesen werden.

Anzahl der Lösungen I

Ein Gleichungssystem kann keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen besitzen.

Anzahl der Lösungen II

Eine Lösung:

Den Fall genau einer Lösung haben wir bereits bei unserem Beispiel gesehen.

Dieser Fall liegt immer genau dann vor, wenn in der erweiterten Koeffizientenmatrix $\left[A|b\right]$ die Matrix A nach dem Überführen in Zeilenstufenform genauso viele vom Nullvektor verschiedene Zeilen besitzt wie das Gleichungssystem Variablen hat.

Anzahl der Lösungen III

Keine Lösung:

Es ist möglich, dass ein Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

Dies ist genau dann der Fall, wenn in der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A|b]$ (nach dem Überführen in Zeilenstufenform) eine Zeile der folgenden Art auftritt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & b \end{array}\right] \quad (\text{mit } b \neq 0).$$

Anzahl der Lösungen IV

Dies würde bedeuten, dass

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = b \ (\neq 0)$$

gilt, was einen Widerspruch darstellt. Das Gleichungssystem kann folglich keine Lösung besitzen.

Anzahl der Lösungen V

Unendlich viele Lösungen:

Es ist zudem möglich, dass ein Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt.

Dieser Fall liegt immer genau dann vor, wenn in der erweiterten Koeffizientenmatrix $\left[A|b\right]$ (nach dem Überführen in Zeilenstufenform) die Matrix A weniger vom Nullvektor verschiedene Zeilen besitzt als das Gleichungssystem Variablen hat.

Mit anderen Worten: „Es gibt mehr Variablen als Gleichungen“.

Anzahl der Lösungen VI

Aufgabe:

Löse das folgende lineare Gleichungssystem.

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 22\\
3x_1 - 2x_2 - x_3 &= -7
\end{aligned}
$$

Lösung:

Auch in diesem Fall wird zunächst die erweiterte Koeffizientenmatrix erstellt und schrittweise in Zeilenstufenform gebracht.

$$
\left[A \middle| b\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 22\\ 3 & -2 & -1 & -7 \end{array}\right]
$$

Anzahl der Lösungen VII

Multiplikation der ersten Zeile mit $\frac{1}{2}$ ergibt

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 11 \\ 3 & -2 & -1 & -7 \end{array}\right].$$

Anschließend wird durch Addition des (-3)-fachen der ersten zur zweiten Zeile die erste Spalte in die richtige Form gebracht:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 11 \\ 0 & -8 & -\frac{5}{2} & -40 \end{array}\right].$$

Anzahl der Lösungen VIII

Multiplikation der zweiten Zeile mit $-\frac{1}{8}$ stellt die gewünschte Zeilenstufenform her:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 11 \\ 0 & 1 & \frac{5}{16} & 5 \end{array}\right].$$

Die Spalten mit den führenden Einsen repräsentieren die *führenden Variablen*, die restlichen Spalten stellen die *freien Variablen* dar.

Anzahl der Lösungen IX

Um die Lösung zu erhalten, weist man den freien Variablen Parameter zu. In unserem Beispiel ist

$$x_3 = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

die einzige freie Variable.

Die führenden Variablen rechnet man wie gewohnt durch Rückwärtseinsetzen aus. Für die zweite Zeile der Matrix ergibt sich somit

$$x_2 + \frac{5}{16}\,x_3 = 5$$

$$x_2 = 5 - \frac{5}{16}\,t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Anzahl der Lösungen X

Um x_1 zu berechnen, setzt man nun x_2 und x_3 in die erste Zeile ein. Es folgt

$$x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 11.$$

Umstellen nach x_1 ergibt

$$\begin{aligned} x_1 &= 11 - 2 \cdot \left(5 - \frac{5}{16}\ t\right) - \frac{1}{2}\ t \\ &= 1 + \frac{1}{8}\ t \quad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Anzahl der Lösungen XI

Als Gesamtlösung haben wir also Folgendes erhalten ($t \in \mathbb{R}$):

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 + \frac{1}{8}\,t \\
x_2 &= 5 - \frac{5}{16}\,t \\
x_3 &= t
\end{aligned}
$$

Anzahl der Lösungen XII

Wir können die Lösung auch wie folgt darstellen:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{8}t \\ 5 - \frac{5}{16}t \\ t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{8}t \\ -\frac{5}{16}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{5}{16} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Man nennt dies die *Parameterform der Lösung*.

Aufgaben

Aufgabe 3

Bestimme die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems mit dem Gauß- und mit dem Gauß-Jordan-Verfahren.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 10 \\ -3x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= -27 \\ -x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= -18 \end{aligned}$$

Aufgaben

Aufgabe 4

Mithilfe des Gauß-Verfahrens sei für ein gegebenes lineares Gleichungssystem die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform gefunden worden:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 2 & 11 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Bestimme die Lösung des Gleichungssystems und gib diese in Parameterform an!

Vektorräume

Definition I

Gegeben seien eine Menge V, ein Körper $(K, +, \cdot)$, eine innere zweistellige Verknüpfung $\oplus : V \times V \to V$ (die Vektoraddition) sowie eine äußere zweistellige Verknüpfung $\odot : K \times V \to V$ (die skalare Multiplikation).

Man nennt $(V, \oplus, \odot)$ einen *Vektorraum über dem Körper K* (kurz: *K-Vektorraum*), wenn es sich bei $(V, \oplus)$ um eine abelsche Gruppe handelt und wenn für die skalare Multiplikation $\odot$ sowohl ein neutrales Element existiert als auch die „Assoziativ- und Distributivgesetze" gelten.

Definition II

- Die Vektoraddition $\oplus$ ist assoziativ. Für alle $u, v, w \in V$ gilt:
$$\left(u \oplus v\right) \oplus w = u \oplus \left(v \oplus w\right) = u \oplus v \oplus w.$$
- Es existiert ein neutrales Element $0_V \in V$, so dass für alle $v \in V$ gilt:
$$v \oplus 0_V = 0_V \oplus v = v.$$
Das Element 0_V wird als *Nullvektor* bezeichnet.
- Zu jedem Element $v \in V$ existiert ein Element $-v$, für das gilt:
$$v \oplus \left(-v\right) = \left(-v\right) \oplus v = 0_V.$$
- Die Vektoraddition $\oplus$ ist kommutativ. Für alle $u, v \in V$ gilt:
$$u \oplus v = v \oplus u.$$

Definition III

- Für alle $\lambda, \mu \in K$, $v \in V$ gilt (Assoziativgesetz):
$$(\lambda \cdot \mu) \odot v = \lambda \odot (\mu \odot v).$$
- Es existiert ein neutrales Element $1_K \in K$, so dass für alle $v \in V$ gilt:
$$1_K \odot v = v.$$
- Zusammen mit der Vektoraddition $\oplus$ gilt für alle $\lambda \in K$, $u, v \in V$ das Distributivgesetz:
$$\lambda \odot (u \oplus v) = (\lambda \odot u) \oplus (\lambda \odot v).$$
- Zusammen mit der Addition $+$ im Körper K gilt für alle $\lambda, \mu \in K$, $v \in V$ das Distributivgesetz:
$$(\lambda + \mu) \odot v = (\lambda \odot v) \oplus (\mu \odot v).$$

Definition IV

In der Mathematik ist es üblich, sowohl die Addition im Körper K als auch die Addition im Vektorraum V mit demselben Operator $+$ zu bezeichnen, obgleich es sich um verschiedene Operationen handelt. Analog werden die Multiplikation im Körper K und die skalare Multiplikation im Vektorraum V mit $\cdot$ bezeichnet. In der Praxis besteht im Allgemeinen keine Gefahr, die Additionen bzw. Multiplikationen zu verwechseln.

Untervektorraum

Gegeben sei ein Vektorraum $(V, +, \cdot)$ über einem Körper K. Man nennt eine Teilmenge $U \subseteq V$ genau dann einen *Untervektorraum* bzw. *Unterraum* von V, wenn U nichtleer und bezüglich der Vektoraddition $+$ und der skalaren Multiplikation $\cdot$ abgeschlossen ist, d.h., falls die folgenden Eigenschaften gelten:

- $U \neq \emptyset$;
- $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$;
- $u \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot u \in U$.

Aufgaben

Aufgabe 5

Entscheide für die folgenden Mengen $U_1, \ldots, U_4$, ob es sich um einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ handelt:

a) $U_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq -5 \right\}$;

b) $U_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 42 \right\}$;

c) $U_3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 2x_1 - 3x_2 \right\}$;

d) $U_4 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_2^2 \right\}$.

Aufgaben

Aufgabe 6

Gib eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ an, die abgeschlossen bzgl. skalarer Multiplikation, aber nicht abgeschlossen bezüglich der Vektoraddition ist.

Aufgaben

Aufgabe 7

Gegeben seien ein Vektorraum V über einem Körper K sowie zwei Untervektorräume $U_1 \subseteq V$ und $U_2 \subseteq V$.

Zeige, dass es sich bei der Schnittmenge $U_1 \cap U_2$ ebenfalls um einen Untervektorraum von V handelt.

Linearkombination

Gegeben seien ein Vektorraum V über einem Körper K, Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ sowie Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$.

Einen Vektor v, der sich durch

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

darstellen lässt, nennt man *Linearkombination* von $v_1, \ldots, v_n$. Die Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ werden *Koeffizienten* der Linearkombination genannt.

Lineare Hülle

Gegeben seien ein Vektorraum V über einem Körper K sowie Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$. Man nennt die Menge

$$\operatorname{Lin}\left(v_1, \ldots, v_n\right) = \left\{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\right\}$$

die *lineare Hülle* von $v_1, \ldots, v_n$. Die lineare Hülle ist folglich die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren v_i.

Die lineare Hülle der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ wird häufig auch als $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$ geschrieben.

Lineare Unabhängigkeit

Lineare Unabhängigkeit I

Gegeben sei ein Vektorraum V über einem Körper K. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen

- *linear abhängig*, wenn neben der trivialen Lösung

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0_K$$

noch mindestens eine weitere Lösung für die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0_V$$

existiert. In diesem Fall besitzen nicht alle Skalare λ_i den Wert 0_K. Gilt beispielsweise $\lambda_k \neq 0_K$, so kann durch Umstellen der Gleichung eine Linearkombination für den Vektor v_k gefunden werden:

$$v_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \cdot v_1 - \ldots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} \cdot v_{k-1} - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \cdot v_{k+1} - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \cdot v_n.$$

Lineare Unabhängigkeit II

Gegeben sei ein Vektorraum V über einem Körper K. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen

- *linear unabhängig*, wenn neben der trivialen Lösung

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0_K$$

keine weiteren Lösungen für die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0_V$$

existieren. In diesem Fall ist es nicht möglich, einen der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ als Linearkombination der anderen Vektoren darzustellen.

Lineare Unabhängigkeit III

Aufgabe 8

Entscheide für die folgenden Vektoren, ob sie linear abhängig oder linear unabhängig sind. Gib jeweils eine Begründung.

a) $v_1 = (1, 1, 2, -1)$, $v_2 = (0, 2, -2, 2)$, $v_3 = (-3, -1, -7, 6)$ und $v_4 = (-6, 2, -17, 18)$.

b) $v_1 = (0, 8, 1, 5)$, $v_2 = (4, 7, 1, 1)$, $v_3 = (4, 2, 2, 3)$, $v_4 = (1, 3, 3, 7)$ und $v_5 = (1, 9, 0, 7)$.

Lineare Unabhängigkeit IV

Aufgabe 9

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ der Polynome mit Koeffizienten aus den reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Die Operationen seien die Polynomaddition sowie die Multiplikation mit reellen Zahlen.

Entscheide, ob die die folgenden Polynome linear abhängig oder linear unabhängig sind.

$$p_1(x) = x^2 - x + 1$$
$$p_2(x) = -x^2 + 2x - 4$$
$$p_3(x) = -x^2 + 4x - 10$$

Basis

Erzeugendensystem

Gegeben seien ein Vektorraum V über einem Körper K.

Man nennt eine Teilmenge $U = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ ein *Erzeugendensystem* des Vektorraums V, falls die folgende Eigenschaft gilt:

- Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ erzeugen den Vektorraum V. Für alle Elemente $v \in V$ existieren (nicht notwendigerweise eindeutig bestimmte) Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so dass gilt:
$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n.$$

Basis I

Gegeben sei ein Vektorraum V über einem Körper K sowie die Vektoren $b_1, \ldots, b_n \in V$.

Man nennt eine Teilmenge $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq V$ eine *Basis* des Vektorraums V, falls die folgenden Eigenschaften gelten:

- Die Vektoren $b_1, \ldots, b_n$ sind linear unabhängig.
- Die Vektoren $b_1, \ldots, b_n$ erzeugen den Vektorraum V. Für alle Elemente $v \in V$ existieren (eindeutig bestimmte) Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so dass gilt:

$$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n.$$

Basis II

Gegeben seien die linear unabhängigen Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$, die den Unterraum U aufspannen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Basis des Vektorraums U.
- Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ bilden ein minimales Erzeugendensystem des Vektorraums U.
- Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind maximal linear unabhängig.

Basis III

Zum Bestimmen einer Basis eines durch Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ erzeugten Unterraums kann der Gauß-(Jordan-)Algorithmus verwendet werden. Zunächst werden die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ als Zeilen einer Matrix geschrieben:

$$\begin{bmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{bmatrix}.$$

Wird diese anschließend in Zeilenstufenform überführt, so bilden die Nichtnullzeilen $v_1', \ldots, v_r'$ der entstandenen Matrix eine Basis des durch die ursprünglichen Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ aufgespannten Unterraums.

Basisergänzungssatz

Sei V ein K-Vektorraum, $M \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge und E ein Erzeugendensystem von V. Dann lässt sich M durch Elemente aus E zu einer Basis von V ergänzen.

Basis IV

Aufgabe 10

Gegeben seien die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 2, -2) \\ v_2 &= (2, 4, -3) \\ v_3 &= (3, 6, -9) \\ v_4 &= (2, 4, -1). \end{aligned}$$

a) Bestimme eine Basis von $\operatorname{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

b) Gib die Dimension von $\operatorname{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ an.

c) Um welchen Raum handelt es sich bei $\operatorname{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$?

Basis V

Aufgabe 11

Es sei $U = \left\{ (x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Zeige, dass es sich bei den Vektoren $b_1 = (-1, 1, 0)$ und $b_2 = (1, 1, 0)$ um eine Basis des Unterraums U handelt.

Basis VI

Aufgabe 12

Bestimme eine Basis des folgenden Untervektorraums $U \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$U = \Big\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0 \wedge x_2 - 3x_3 = 0\Big\}.$$

Fundamentalräume einer Matrix

Die Fundamentalräume einer Matrix I

Gegeben sei eine $m \times n$ - Matrix A.

- Der *Zeilenraum* $Z(A)$ ist der durch die m Zeilenvektoren der Matrix A aufgespannte Vektorraum:

$$\begin{aligned} Z(A) &= \operatorname{Lin}(z_1, \ldots, z_m) \\ &= \left\{ \lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_m z_m \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K \right\}. \end{aligned}$$

- Der *Spaltenraum* $S(A)$ ist der durch die n Spaltenvektoren der Matrix A aufgespannte Vektorraum:

$$\begin{aligned} S(A) &= \operatorname{Lin}(s_1, \ldots, s_n) \\ &= \left\{ \lambda_1 s_1 + \ldots + \lambda_n s_n \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \right\}. \end{aligned}$$

Die Fundamentalräume einer Matrix II

Gegeben sei eine $m \times n$ - Matrix A.

- Der *Nullraum* $N(A)$ ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$:

$$N(A) = \left\{ x \mid Ax = 0 \right\}.$$

- Der *Nullraum der Transponierten* $N(A^T)$ ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $A^T x = 0$:

$$N\left(A^T\right) = \left\{ x \mid A^T x = 0 \right\}.$$

Die Fundamentalräume einer Matrix III

Aufgabe 13

Gegeben sei die folgende Matrix A mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}_5$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Bestimme eine Basis des Spaltenraums $S(A)$.

b) Gib die Dimension von $S(A)$ an.

c) Welche Aussage kann mithilfe der Ergebnisse aus a) und b) über den Zeilenraums $Z(A)$ getroffen werden?

Die Fundamentalräume einer Matrix IV

Gegeben sei eine $m \times n$ - Matrix A. Es gelten die folgenden Zusammenhänge:

- $Z(A) = S(A^T)$
- $S(A) = Z(A^T)$
- $\dim(Z(A)) = \dim(S(A))$
- $\dim(Z(A)) + \dim(N(A)) = n$
- $\dim(S(A)) + \dim(N(A^T)) = m$
- $\mathrm{rg}(A) = \dim(Z(A)) = \dim(S(A))$

Zusammenhänge mit linearen Gleichungssystemen

Im Folgenden sei eine quadratische $n \times n$ - Matrix A betrachtet:

- $\operatorname{rg}(A) \neq \operatorname{rg}(A \mid b) \Rightarrow Ax = b$ ist nicht lösbar
- $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \mid b) = n \Rightarrow Ax = b$ ist eindeutig lösbar
- $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \mid b) < n \Rightarrow Ax = b$ hat unendlich viele Lösungen

Zusammenhänge mit Determinanten und inversen Matrizen

Im Folgenden sei eine quadratische $n \times n$ - Matrix A betrachtet:

- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) < n$
- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \dim(N(A)) > 0$
- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = n$
- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \dim(N(A)) = 0$
- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ existiert nicht
- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ existiert

Lineare Abbildungen

Definition I

Gegeben seien zwei Vektorräume V und W über einem Körper K. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *lineare Abbildung*, wenn für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in K$ die folgenden Eigenschaften gelten:

- f ist *homogen*:
$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$
- f ist *additiv*:
$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Die beiden Bedingungen können zu einer einzigen Bedingung zusammengefasst werden:

$$f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y).$$

Definition II

Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ lässt sich eindeutig beschreiben durch

- die Bilder einer Basis des Vektorraums V;
- eine Abbildungsmatrix A.

Aufgaben

Aufgabe 14

Gegeben seien eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sowie die Bilder der Basisvektoren $b_1 = (1, 1)$ und $b_2 = (-3, -2)$ des $\mathbb{R}^2$. Es sei

$$f(b_1) = f(1, 1) = (-6, 8)$$

$$f(b_2) = f(-3, -2) = (-4, 9).$$

Bestimme das Bild $f(v)$ des Vektors $v = (1, 0)$.

Aufgaben

Aufgabe 15

Überprüfe, ob es sich bei der folgenden Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um eine lineare Abbildung handelt:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + 3y - 5z \\ 2y - z \\ 2x + 3z \end{pmatrix}.$$

Abbildungsmatrix I

Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : K^n \to K^m$.

Die Bilder $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ der Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ sind die Spalten der Abbildungsmatrix A; es gilt

$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ f(e_1) & \cdots & f(e_n) \\ | & & | \end{bmatrix}.$$

Handelt es sich bei der gegebenen Basis des Vektorraums K^n nicht um die Einheitsvektoren, so müssen beim Erstellen der Abbildungsmatrix zunächst die Bilder der Einheitsvektoren bestimmt werden.

Abbildungsmatrix II

Beispiel:

Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Es gelte

$$f(e_1) = f(1,0) = (1,2,3)$$
$$f(e_2) = f(0,1) = (0,-1,2)$$

Die Bilder der Einheitsvektoren sind die Spalten der Abbildungsmatrix A; es gilt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Abbildungsmatrix III

Aufgabe 16

Gegeben seien eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sowie die Bilder der Basisvektoren $b_1 = (1, 1)$ und $b_2 = (1, 2)$ des $\mathbb{R}^2$. Es sei

$$f(b_1) = f(1, 1) = (-8, 5, 0)$$
$$f(b_2) = f(1, 2) = (2, 2, -1).$$

Bestimme die zur linearen Abbildung f gehörende Abbildungsmatrix A.

Bild und Kern einer linearen Abbildung

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen.

Der *Kern* von f ist die Menge

$$\mathrm{Kern}(f) = \Big\{ v \in V \mid f(v) = 0 \Big\}.$$

Das *Bild* von f ist die Menge

$$\mathrm{Bild}(f) = \Big\{ f(v) \mid v \in V \Big\}.$$

Der Kern von f ist ein Unterraum von V. Das Bild von f ist ein Unterraum von W.

Dimensionsformel

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum, W ein beliebiger Vektorraum und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist $\mathrm{Bild}(f)$ endlich erzeugt und es gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)).$$

Aufgaben

Aufgabe 17

Seien V und W K-Vektorräume und U ein Unterraum von W. Weiter sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass $f^{-1}(U)$ ein Unterraum von V ist.

Definition III

Eine lineare Abbildung (oder auch ein *Homomorphismus*) $f : V \to W$ heißt ein

- *Monomorphismus*, falls f injektiv ist;
- *Epimorphismus*, falls f surjektiv ist;
- *Isomorphismus*, falls f bijektiv ist;
- *Endomorphismus*, falls $V = W$ gilt;
- *Automorphismus*, falls f bijektiv ist und $V = W$ gilt.

Definition IV

Es seien V und W Vektorräume über K, $(v_1, \dots, v_n)$ sei eine Basis von V und $f : V \to W$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt: f ist genau dann injektiv, wenn die Vektoren $f(v_1), \dots, f(v_n) \in W$ linear unabhängig sind.

Es seien V und W Vektorräume über K, $(v_1, \dots, v_n)$ sei eine Basis von V und $f : V \to W$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt: f ist genau dann surjektiv, wenn $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ ein Erzeugendensystem von W ist.

Definition V

Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn $\text{Kern}(f) = \{0\}$ gilt.

Ist $f : V \to W$ ein Isomorphismus, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ ein Isomorphismus.

Inverse Matrix

Inverse Matrix I

Eine quadratische Matrix A heißt *invertierbar*, falls es eine Matrix A^{-1} gibt, für die

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

gilt. Nicht jede quadratische Matrix ist invertierbar. Falls eine Matrix invertierbar ist, so ist ihr Inverses allerdings eindeutig bestimmt.

Inverse Matrix II

Frage:

Woher weiß man, ob eine quadratische Matrix invertierbar ist oder nicht? Wenn man weiß, dass eine Matrix invertierbar ist, wie kann man die inverse Matrix bestimmen?

Inverse Matrix III

Antwort:

Man erstellt zunächst die folgende Blockmatrix:

$$\left[A \mid E\right].$$

A ist die zu invertierende Matrix, E ist eine entsprechend dimensionierte Einheitsmatrix.

Mithilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus wird die Matrix $[A|E]$ anschließend in reduzierte Zeilenstufenform überführt.

Inverse Matrix IV

Ist die Matrix A nicht invertierbar, so lässt sie sich mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus nicht zur Einheitsmatrix E umformen.

Im Gegenzug kann die Matrix A immer zur Einheitsmatrix E umgeformt werden, wenn sie invertierbar ist.

Inverse Matrix V

Aufgabe 18

Bestimme die zur gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ inverse Matrix A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme & inverse Matrizen I

Hat ein lineares Gleichungssystem eine eindeutige Lösung, so lässt sich dieses auch mithilfe der Inversen der Koeffizientenmatrix A berechnen. Es gilt

$$Ax = b$$

$$\Rightarrow x = A^{-1}b.$$

Lineare Gleichungssysteme & inverse Matrizen II

Aufgabe 19

Löse das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Hinweis: Das Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung.

Einteilung von quadratischen Matrizen I

reguläre/invertierbare/nicht-singuläre Matrizen	**nicht-invertierbare/singuläre Matrizen**
$\det A \neq 0$	$\det A = 0$
Die Spalten von A bilden eine Basis des K^n.	Die Spalten von A bilden keine Basis des K^n.
Die Spalten von A sind linear unabhängig.	Die Spalten von A sind linear abhängig.
Die Zeilen von A bilden eine Basis des K^n.	Die Zeilen von A bilden keine Basis des K^n.
Die Zeilen von A sind linear unabhängig.	Die Zeilen von A sind linear abhängig.

Einteilung von quadratischen Matrizen II

reguläre/invertierbare/nicht-singuläre Matrizen	**nicht-invertierbare/singuläre Matrizen**
$Ax = b$ ist für jede rechte Seite b eindeutig lösbar.	Für jede rechte Seite b gilt: $Ax = b$ ist nicht eindeutig lösbar, d.h., $Ax = b$ ist entweder unlösbar oder es gibt mehr als eine Lösung.
Das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung.	Das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ besitzt neben der trivialen Lösung noch weitere (nichttriviale) Lösungen.
Mit dem Gauß-Jordan-Verfahren erhält man die reduzierte Zeilenstufenmatrix $Z = E_n$.	Das Gauß-Jordan-Verfahren führt zu einer reduzierten Zeilenstufenmatrix $Z \neq E_n$.

Determinanten

Determinanten kleiner Matrizen

Die Determinanten von 1×1, 2×2 und 3×3 Matrizen können mithilfe der folgenden Formeln bestimmt werden:

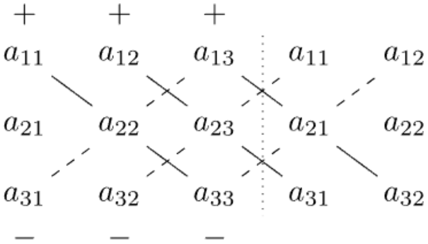
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} = a_{11}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Die Regel von Sarrus

Die Regel zur Berechnung einer 3×3 Determinante ist auch als *Regel von Sarrus* bekannt und kann durch folgendes Schema einfach dargestellt werden:



Die Leibniz-Formel

Die Determinante einer beliebigen $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ kann mithilfe der *Leibniz-Formel* berechnet werden:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right).$$

Der Laplacesche Entwicklungssatz

Die Determinante einer beliebigen $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ kann mithilfe des *Laplaceschen Entwicklungssatzes* berechnet werden.

- Entwicklung nach der j-ten Spalte:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

- Entwicklung nach der i-ten Spalte:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Die Matrizen A_{ij} sind die $(n-1)\times(n-1)$ Untermatrizen von A, die man durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte erhält.

Gaußsches Eliminationsverfahren

Die Determinante einer beliebigen $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ kann mithilfe des *Gaußschen Eliminationsverfahrens* berechnet werden.

- Ist A eine Dreiecksmatrix, dann ist das Produkt der Hauptdiagonalenelemente die Determinante von A.
- Falls B aus A hervorgeht, indem man zwei Zeilen bzw. zwei Spalten vertauscht, so gilt $\det(B) = -\det(A)$.
- Falls B aus A hervorgeht, indem man ein Vielfaches einer Zeile bzw. Spalte zu einer anderen Zeile bzw. Spalte addiert, so gilt $\det(A) = \det(B)$.
- Falls B aus A hervorgeht, indem man das λ-fache einer Zeile bzw. Spalte bildet, so gilt $\det(B) = \lambda \det(A)$.

Aufgaben

Aufgabe 20

Gegeben sei die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bestimme die Determinante $\det(A)$

a) mithilfe der Regel von Sarrus;

b) mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes;

c) mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Charakteristisches Polynom

Beim *charakteristischen Polynom* χ_A einer quadratischen $n \times n$ Matrix $A \in \mathcal{K}^{n \times n}$ handelt es sich um das folgende Polynom:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot E_n - A).$$

Bei E_n handelt es sich um die $n \times n$ Einheitsmatrix, bei det handelt es sich um die Determinante. Die Matrix $\lambda \cdot E_n - A$ wird als charakteristische Matrix bezeichnet.

Aufgaben

Aufgabe 21

Bestimme das charakteristische Polynom der folgenden quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}.$$

Eigenwert und Eigenvektor

Ein Vektor $v \in \mathcal{K}^n$ mit $v \neq 0$ wird *Eigenvektor* der Matrix $A \in \mathcal{K}^{n \times n}$ genannt, wenn er bei der Multiplikation mit der Matrix A auf ein Vielfaches λv von sich selbst abgebildet wird, wenn also gilt:

$$Av = \lambda v.$$

Der Wert $\lambda \in \mathcal{K}$ wird als der zum Vektor v gehörende *Eigenwert* bezeichnet.

Alternativ: Besitzt die Gleichung $Av = \lambda v$ für ein gegebenes λ eine Lösung $v \neq 0$, so handelt es sich bei λ um einen *Eigenwert* der Matrix A. Jede zu λ gehörende Lösung $v \neq 0$ wird dann *Eigenvektor* von A zum Eigenwert λ genannt.

Hinweis: Der Nullvektor 0 erfüllt trivialerweise für alle Matrizen stets diese Bedingung und wird niemals zu den Eigenvektoren gezählt.

Eigenraum

Handelt es sich bei $\lambda \in \mathcal{K}$ um einen Eigenwert einer Matrix $A \in \mathcal{K}^{n\times n}$, so handelt es sich bei der Menge aller Eigenvektoren zum Eigenwert λ, vereinigt mit dem Nullvektor, um den *Eigenraum* zum Eigenwert λ; es gilt:

$$\operatorname{Eig}(A, \lambda) = \left\{ v \in \mathcal{K}^n \mid Av = \lambda v \right\}.$$

Ist die Dimension des Eigenraums größer als 1, existieren also mehrere linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert λ, so wird der Eigenwert λ als *entartet* bezeichnet. Die Dimension des Eigenraums wird als *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts λ bezeichnet.

Verfahren zur Berechnung der Eigenwerte

Das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot E_n - A)$ der Matrix A spielt eine zentrale Rolle bei der Bestimmung der Eigenwerte von A, denn diese entsprechen exakt den Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

Für kleine Matrizen ist die Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms symbolisch möglich, für größere Matrizen oftmals nur (näherungsweise) mithilfe numerischer Verfahren. Es gilt:

- Handelt es sich beim Körper $\mathcal{K}$ um die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, so existieren maximal n reelle Nullstellen - und somit maximal n reelle Eigenwerte. Handelt es sich beim Grad n des charakteristischen Polynoms um eine ungerade Zahl, so existiert mindestens eine reelle Nullstelle - und somit mindestens ein reeller Eigenwert.
- Handelt es sich beim Körper $\mathcal{K}$ um die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, so existieren exakt n komplexe Nullstellen – und somit exakt n komplexe Eigenwerte.

Aufgaben

Aufgabe 22

Bestimme die (reellen) Eigenwerte der folgenden quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}.$$

Verfahren zur Berechnung der Eigenvektoren

Bei den zum Eigenwert λ gehörenden Eigenvektoren v einer Matrix $A \in \mathcal{K}^{n\times n}$ handelt es sich um die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\left(A - \lambda \cdot E_n\right) \cdot v = 0.$$

Dieses kann beispielsweise mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren gelöst werden.

Die Menge aller Eigenvektoren zum Eigenwert λ bildet den Eigenraum zum Eigenwert λ. Mithilfe der Parameterform der Lösung des linearen Gleichungssystems können zudem linear unabhängige Eigenvektoren gefunden werden, bei deren linearer Hülle es sich um den Eigenraum zum Eigenwert λ handelt, die also eine Basis des Eigenraums bilden. Es handelt sich beim Eigenraum zum Eigenwert λ um den Nullraum der Matrix $A - \lambda \cdot E_n$.

Aufgaben

Aufgabe 23

Bestimme die Eigenräume der folgenden quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}.$$

Verwende hierzu die in der vorherigen Aufgabe gefundenen Eigenwerte der Matrix A.

Diagonalisierbarkeit

Eine quadratische Matrix $A \in \mathcal{K}^{n\times n}$ heißt *diagonalisierbar* (auch *diagonalähnlich*), falls eine Diagonalmatrix $D \in \mathcal{K}^{n\times n}$ existiert, die ähnlich zu A ist – falls also eine reguläre Matrix $S \in \mathcal{K}^{n\times n}$ existiert, so dass gilt:

$$D = S^{-1}AS.$$

Verfahren zur Diagonalisierung I

Die Bestimmung der Diagonalmatrix D sowie der regulären Matrix S geschieht mit den folgenden Schritten:

- Bestimmung der Eigenwerte λ_i der Matrix A. (Hinweis: Es ist es möglich, dass Eigenwerte mehrfach vorkommen.)
- Berechnung der Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_i – diese bilden die Eigenräume $\text{Eig}(A, \lambda_i)$ zu den Eigenwerten λ_i. (Hinweis: Übereinstimmende Eigenwerte $\lambda_{i_1} = \ldots = \lambda_{i_k}$ liefern dieselben Eigenvektoren und denselben Eigenraum.)

Verfahren zur Diagonalisierung II

- Bestimmung von Basen der Eigenräume $\operatorname{Eig}(A, \lambda_i)$ für die verschiedenen Eigenwerte λ_i. Da im Falle der Diagonalisierbarkeit die algebraische und die geometrische Vielfachheit der jeweiligen Eigenwerte übereinstimmt, lässt sich zu jedem Eigenwert $\lambda_{i_1} = \ldots = \lambda_{i_k}$ mit algebraischer Vielfachheit k eine Basis $\mathfrak{B}_i = \left\{ b_{i_1}, \ldots, b_{i_k} \right\}$ aus genau k linear unabhängigen Eigenvektoren finden.
- Bei den Hauptdiagonalelementen der Matrix D handelt es sich um die Eigenwerte und bei den Spalten der Matrix S handelt es sich um die Basisvektoren des zugehörigen Eigenraums. Für die gesuchte Diagonalmatrix D sowie die gesuchte reguläre Matrix S ergibt sich somit:

$$D = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$$

$$S = \begin{bmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_n \\ | & & | \end{bmatrix}.$$

Aufgaben

Aufgabe 24

Gegeben sei die folgende quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}.$$

Ist die Matrix A diagonalisierbar? Falls ja: Gib eine reguläre Matrix S und eine Diagonalmatrix D an, so dass

$$D = S^{-1}AS$$

gilt. Falls nein: Begründe, wieso nicht.