Tutorium:
Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Abschlussklausur am 18.07.2023
Teil 1

12. Juli 2023

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Konvergenz

Obere und untere Schranken I

Gegeben sei eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Menge $M = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sei die Menge aller Folgenglieder der Folge (x_n).

Als *obere Schranke* der Menge M (und somit auch der Folge (x_n)) bezeichnet man einen Wert k, für den $x_i \leq k$ für alle $x_i \in M$ gilt. Der kleinste Wert k, für den die genannte Eigenschaft gilt, wird *Supremum* genannt.

Als *untere Schranke* der Menge M (und somit auch der Folge (x_n)) bezeichnet man einen Wert ℓ, für den $x_i \geq \ell$ für alle $x_i \in M$ gilt. Der größte Wert ℓ, für den die genannte Eigenschaft gilt, wird *Infimum* genannt.

Obere und untere Schranken II

Aufgabe 1

Gegeben seien zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$x_n = 3 + \frac{2n+1}{5n-1}$$
$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Bestimme, falls möglich, sowohl das Infimum als auch das Supremum dieser Folgen. Falls diese Werte nicht existieren, ist eine (kurze) Begründung hierfür anzugeben.

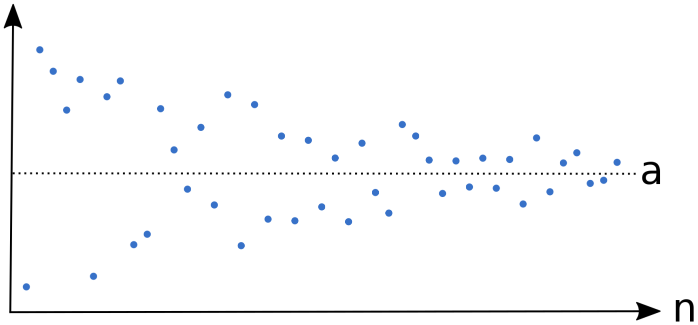
Definition der Konvergenz I

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen *konvergiert* gegen eine reelle Zahl a, wenn es für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt.

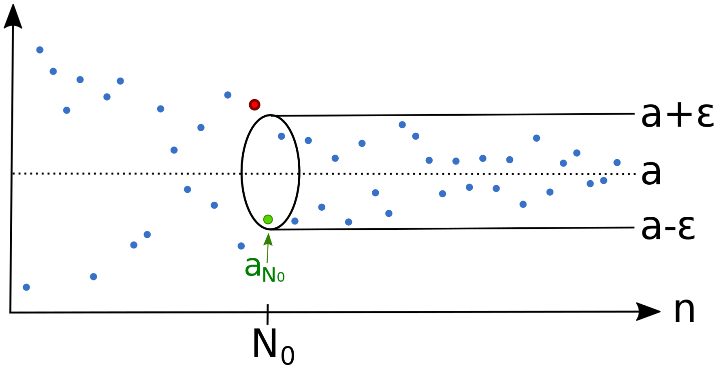
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert uneigentlich* (bzw. *divergiert bestimmt*) gegen $\pm\infty$, wenn es für jede reelle Zahl $r > 0$ (bzw. $r < 0$) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n > r$ (bzw. $a_n < r$) für alle $n > n_0$ gilt.

In allen anderen Fällen *divergiert* die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

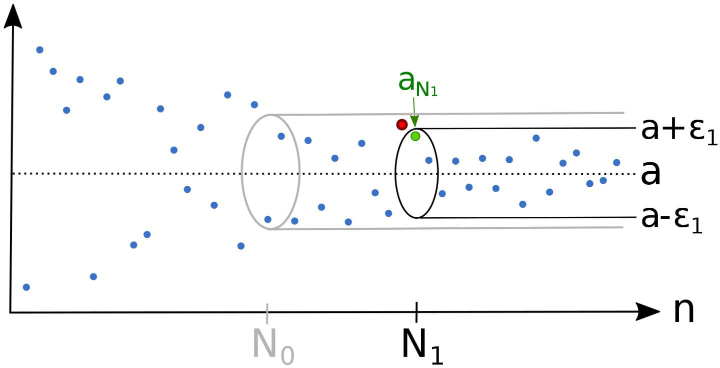
Definition der Konvergenz II



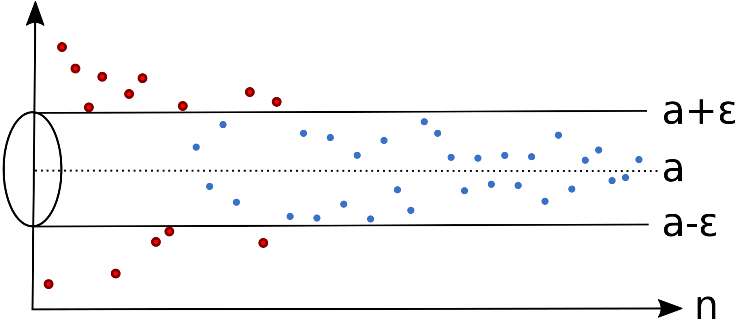
Definition der Konvergenz III



Definition der Konvergenz IV



Definition der Konvergenz V



Definition der Konvergenz VI

Aufgabe 2

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_n = \frac{2n+3}{5n}$.

a) Bestimme den Grenzwert der Folge (a_n) für $n \to \infty$.

b) Überprüfe mithilfe der Definition der Konvergenz, ob es sich bei dem in a) gefundenen Wert tatsächlich um den Grenzwert der Folge (a_n) handelt.

Definition der Konvergenz VII

Aufgabe 3

Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $b_n = (-1)^n$.

Verwende diese Folge, um zu argumentieren, weshalb es bei der Definition der Konvergenz nicht genügt, dass für *ein* $\varepsilon > 0$ ein n_0 mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n > n_0$ gefunden werden kann.

Cauchysches Konvergenzkriterium

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > n_0$ gilt.

Satz über monotone, beschränkte Folgen I

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton steigend*, falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Entsprechend definiert man *monoton fallend* für $a_{n+1} \leq a_n$. Eine Folge heißt *monoton*, falls sie monoton steigend oder monoton fallend ist.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, falls die Menge ihrer Folgenglieder beschränkt ist (d.h., falls die Menge $M = \left\{a_n : n \in \mathbb{N}\right\}$ beschränkt ist).

Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Satz über monotone, beschränkte Folgen II

Aufgabe 4

Zeige mithilfe des Satzes über monotone und beschränkte Folgen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

$$a_1 = 2$$
$$a_{n+1} = \left(\frac{a_n}{4}\right)^2 + 1$$

Berühr- und Häufungspunkte

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall der reellen Zahlen. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ heißt *Berührpunkt* von X, falls es mindestens eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in X$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) gibt, die gegen x konvergiert.

Falls es eine solche Folge $x_n \to x$ gibt, wobei zusätzlich alle Folgenglieder $x_n \neq x$ erfüllen, dann ist der Berührpunkt x ebenfalls ein *Häufungspunkt* von X.

Reihen

Definition

Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aus dieser Folge kann man eine neue Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt konstruieren:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
s_n &= \sum_{i=1}^{n} a_i .
\end{aligned}
$$

Man nennt den Wert s_n die *n-te Partialsumme* und die Folge (s_n) eine *Reihe*.

Harmonische Reihe I

Die folgende Reihe wird als *harmonische Reihe* bezeichnet:

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Der Wert H_n wird als *n-te harmonische Zahl* bezeichnet. Die harmonische Reihe divergiert.

Harmonische Reihe II

Die folgende Reihe wird als *allgemeine harmonische Reihe* bezeichnet:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\alpha}}.$$

Allgemeine harmonische Reihen divergieren für $\alpha \leq 1$ und konvergieren für $\alpha > 1$.

Geometrische Reihe I

Die folgende Reihe wird als *geometrische Reihe* bezeichnet:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i.$$

Die geometrische Reihe konvergiert für $|q| < 1$ und divergiert für $|q| > 1$.

Geometrische Reihe II

Die n-te Partialsumme der geometrische Reihe kann mithilfe der *geometrischen Summenformel* berechnet werden:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Für $|q| < 1$ kann die geometrische Summenformel ebenfalls herangezogen werden, um den Grenzwert der geometrischen Reihe zu berechnen:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} q^i \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = \frac{1}{1 - q}.$$

Geometrische Reihe III

Aufgabe 5

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{2^{k+2}}$

Grenzwerte

Limes

Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, die gegen eine reelle Zahl a konvergiert. In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Limes superior

Gegeben sei eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt definiert:

$$b_n = \sup\left\{a_m \mid m \geq n\right\}.$$

Der Grenzwert der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Limes superior* (oberer Grenzwert) der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und wird als

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

geschrieben.

Limes inferior

Gegeben sei eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt definiert:

$$c_n = \inf\left\{a_m \mid m \geq n\right\}.$$

Der Grenzwert der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Limes inferior* (unterer Grenzwert) der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und wird als

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

geschrieben.

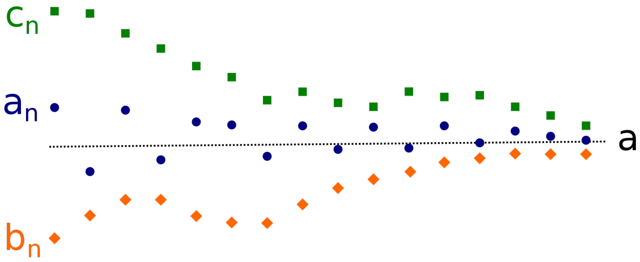
Limes inferior & Limes superior

Gegeben sei eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen. Die Folge konvergiert genau dann, wenn Limes inferior und Limes superior übereinstimmen. In diesem Fall gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Einschließungssatz

Seien (b_n) und (c_n) zwei reelle Folgen mit $\lim_{n\to\infty} b_n = a$, $\lim_{n\to\infty} c_n = a$ mit $b_n \leq c_n$ für fast alle (bis auf endliche viele) n. Ist (a_n) eine weitere reelle Folge mit $b_n \leq a_n \leq c_n$ für fast alle n, so konvergiert (a_n), und zwar ebenfalls gegen a.



$$\lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} c_n$$

Rechenregeln für Grenzwerte I

Gegeben seien zwei reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie zwei (endliche) reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$. Es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n \pm b_n\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot b_n\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$$

sowie für $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

Rechenregeln für Grenzwerte II

Für Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gilt zudem

$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm c) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \pm c = a \pm c.$$

Aufgaben

Aufgabe 6

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{84n^3 - 2n^2 + n - 7}{2n^3 + 4n - 9} \right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^5 + 6n^2 - 3}{-3n^4 + 5n^2 + 101} \right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{n^{12} - 1} + 8n^2 - 5} + 2n}{7n^2 + 17n - 23} \right)$

Grenzwerte und stetige Funktionen I

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0).$$

Grenzwerte und stetige Funktionen II

Aufgabe 7

Berechne den folgenden Grenzwert und gib an, an welchen Stellen die Stetigkeit der beteiligten Funktionen verwendet wird.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\sqrt{\frac{\pi^2 n^3 + 7n - 2}{4n^3 + n^2 - 1}}\right)$$

Grenzwerte und stetige Funktionen II

Aufgabe 8

Gegeben sei eine reelle Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n \to 3$ und $c_n \neq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Berechne den folgenden Grenzwert und begründe deine Antwort.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{c_n^2 - 9}{c_n - 3} \right)$$

Funktionsgrenzwerte I

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Betrachtet man den Grenzwert $\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n)$, also den Grenzwert des Funktionswerts für $x_n \to x_0$, so spricht man von einem *Funktionsgrenzwert*.

Der Funktionsgrenzwert $\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n)$ an der Stelle x_0 existiert genau dann, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ derselbe Grenzwert herauskommt.

Funktionsgrenzwerte II

Aufgabe 9

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2x^2 - x - 5}{x + 1} \right)$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} \right)$

Stetigkeit

Definition der Stetigkeit I

Es sei f eine reelle Funktion und $x_0 \in D_f$. Die Funktion f heißt *stetig an der Stelle* x_0, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D_f$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Die Funktion f heißt *stetig auf* X (für $X \subseteq D_f$), falls f an jeder Stelle $x_0 \in X$ stetig ist.

Definition der Stetigkeit II

Beispiel einer unstetigen Funktion:

Definition der Stetigkeit III

Für jede stetige Funktion muss für alle $x_0 \in D_f$ insbesondere die folgende Eigenschaft gelten:

$$\lim_{x_n \to x_0^-} f(x_n) = f(x_0) = \lim_{x_n \to x_0^+} f(x_n).$$

Definition der Stetigkeit IV

Die Nacheinanderausführung/Verknüpfung zweier stetiger Funktionen ergibt wieder eine stetige Funktion.

Die Nacheinanderausführung/Verknüpfung zweier unstetiger Funktionen ergibt nicht zwangsweise wieder eine unstetige Funktion.

Aufgaben

Aufgabe 10

Entscheide, ob die Funktion $f(x) = |3x - 2|$ an der Stelle $x_0 = \frac{2}{3}$ stetig oder nicht stetig ist. Begründe deine Antwort!

Aufgaben

Aufgabe 11

Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{, für } 0 \leq x < 3; \\ x^2 - 10 & \text{, für } 3 \leq x < 4; \\ x + 1 & \text{, für } x \geq 4. \end{cases}$$

An welchen Stellen ist f stetig, an welchen Stellen ist f unstetig? Begründe deine Antwort!

ε, δ-Definition der Stetigkeit

Es sei f eine reelle Funktion und $x_0 \in D_f$. Die Funktion f heißt stetig an der Stelle x_0, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

für alle $x \in D_f$ gilt, die $|x - x_0| < \delta$ erfüllen.

Aufgabe

Aufgabe 12

Beweise mithilfe der ε, δ-Definition der Stetigkeit, dass die Funktion $f(x) = x^2 + x - 2$ für $x_0 > 0$ stetig ist.

Lösung - Aufgabe 12 I

Es soll δ berechnet werden, so dass die folgende Ungleichung für einen Wert $x_0 > 0$ und ein $\varepsilon > 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
|f(x_0+\delta) - f(x_0)| &< \varepsilon \\
|(x_0+\delta)^2 + (x_0+\delta) - 2 - (x_0^2 + x_0 - 2)| &< \varepsilon \\
|x_0^2 + 2x_0\delta + \delta^2 + x_0 + \delta - 2 - x_0^2 - x_0 + 2| &< \varepsilon \\
|2x_0\delta + \delta^2 + \delta| &< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Für $x_0 > 0$ ist dieser Betrag positiv. Es folgt

$$
\begin{aligned}
2x_0\delta + \delta^2 + \delta &< \varepsilon \\
\delta^2 + (2x_0+1)\delta - \varepsilon &< 0.
\end{aligned}
$$

Lösung - Aufgabe 12 II

Lösen der quadratischen Gleichung $\delta^2 + (2x_0 + 1)\delta - \varepsilon = 0$ ergibt

$$\delta_{1/2} = -\frac{2x_0 + 1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2x_0 + 1}{2}\right)^2 + \varepsilon}.$$

Es handelt sich um eine nach oben geöffnete Parabel, d.h. die zugehörige Ungleichung $\delta^2 + (2x_0 + 1)\delta - \varepsilon < 0$ ist für

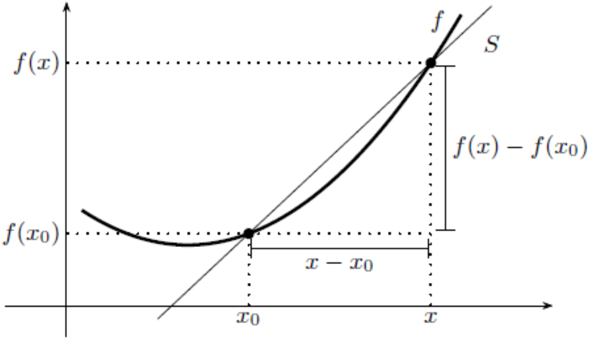
$$-\frac{2x_0 + 1}{2} - \sqrt{\left(\frac{2x_0 + 1}{2}\right)^2 + \varepsilon} < \delta < -\frac{2x_0 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{2x_0 + 1}{2}\right)^2 + \varepsilon}$$

erfüllt. Da per Definition $\delta > 0$ gelten muss, kann der Bereich der zulässigen δ-Werte wie folgt eingeschränkt werden:

$$0 < \delta < -\frac{2x_0 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{2x_0 + 1}{2}\right)^2 + \varepsilon}.$$

Differenzierbarkeit

Differenzenquotient



Der *Differenzenquotient* ist definiert als $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Definition der Differenzierbarkeit I

Die reelle Funktion f heißt *differenzierbar* an der Stelle $x_0 \in D_f$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x_n \to x_0} \left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right)$$

existiert. Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $f'(x_0)$ und nennen ihn die *Ableitung von f an der Stelle x_0*.

f heißt differenzierbar auf $X \subseteq D_f$, wenn f an jeder Stelle $x_0 \in X$ differenzierbar ist

Zu f lässt sich eine Funktion f' mit $D_{f'} = \left\{x_0 \in D_f : f'(x_0) \text{ existiert}\right\}$ definieren, indem man jedem x_0 den Wert $f'(x_0)$ zuordnet. Diese Funktion f' nennt man die *Ableitung von f*.

Definition der Differenzierbarkeit II

Oftmals wird auch folgende Definition der Differenzierbarkeit verwendet:

Die reelle Funktion f heißt *differenzierbar an der Stelle* $x_0 \in D_f$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

existiert. Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $f'(x_0)$ und nennen ihn *Ableitung von f an der Stelle* x_0.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit I

Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

Im Gegenzug ist aber nicht jede stetige Funktion auch differenzierbar.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit II

Aufgabe 13

Entscheide, ob die Funktion $f(x) = |3x - 2|$ an der Stelle $x_0 = \frac{2}{3}$ differenzierbar oder nicht differenzierbar ist. Begründe deine Antwort!

Aufgabe

Aufgabe 14

Zeige mithilfe der Definition der Differenzierbarkeit, dass es sich bei der Funktion $f'(x) = 4x - 3$ um die Ableitung der Funktion $f(x) = 2x^2 - 3x + 7$ handelt.

Aufgabe

Aufgabe 15

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2x^2 - 3x + 7$. Bestimme die Gleichung der Tangente $T(x)$, die an der Stelle $(1, f(1))$ an der Funktion f anliegt.

Stetige Differenzierbarkeit

Eine Funktion f heißt *stetig differenzierbar*, wenn ihre Ableitung f' für alle $x \in D_f$ stetig ist.

Ableitungsregeln

Potenzfunktionen

$$\left[x^{n}\right]' = n \cdot x^{n-1}$$

Exponentialfunktionen

$$\left[e^x\right]' = e^x$$

$$\left[a^x\right]' = a^x \cdot \ln a$$

Logarithmusfunktionen

$$\left[\ln x\right]' = \frac{1}{x}$$

$$\left[\log_a x\right]' = \frac{1}{\ln a \cdot x}$$

$$\left[\log_a x\right]' = \log_a e \cdot \frac{1}{x}$$

Wurzelfunktionen

$$\left[\sqrt{x}\right]' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$\left[\sqrt{x}\right]' = \left[x^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left[\sqrt[n]{x}\right]' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$\left[\sqrt[n]{x}\right]' = \left[x^{\frac{1}{n}}\right]' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$\left[\sqrt[n]{x^m}\right]' = \frac{m}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

$$\left[\sqrt[n]{x^m}\right]' = \left[x^{\frac{m}{n}}\right]' = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$$

Trigonometrische Funktionen I

$$\left[\sin x\right]' = \cos x$$

$$\left[\cos x\right]' = -\sin x$$

$$\left[-\sin x\right]' = -\cos x$$

$$\left[-\cos x\right]' = \sin x$$

$$\left[\tan x\right]' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left[\tan x\right]' = 1 + \tan^2 x$$

$$\left[\cot x\right]' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$\left[\cot x\right]' = -1 - \cot^2 x$$

Trigonometrische Funktionen II

$$\left[\arcsin x\right]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left[\arccos x\right]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left[\arctan x\right]' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\left[\operatorname{arccot} x\right]' = \frac{-1}{x^2+1}$$

Hyperbolische Funktionen I

$$\left[\sinh x\right]' = \cosh x$$

$$\left[\cosh x\right]' = \sinh x$$

$$\left[\tanh x\right]' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\left[\tanh x\right]' = 1 - \tanh^2 x$$

$$\left[\coth x\right]' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$$

$$\left[\coth x\right]' = 1 - \coth^2 x$$

Hyperbolische Funktionen II

$$\left[\operatorname{arsinh} x\right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\left[\operatorname{arcosh} x\right]' = \frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}$$

$$\left[\operatorname{artanh} x\right]' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\left[\operatorname{arcoth} x\right]' = \frac{1}{1-x^2}$$

Ableitungsregeln I

$$\left[u \pm v\right]' = u' \pm v' \qquad \text{(Summenregel)}$$

$$\left[u \cdot v\right]' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad \text{(Produktregel)}$$

$$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

$$\left[u\big(v(x)\big)\right]' = u'\Big(v(x)\Big) \cdot v'(x) \qquad \text{(Kettenregel)}$$

$$\left[u(x)^{v(x)}\right]' = \left[e^{v(x)\cdot\ln(u(x))}\right]'$$

Ableitungsregeln V

Aufgabe 16

Bestimme die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f_1(x) = \sqrt{x^2+1} \cdot \tan(x)$

b) $f_2(x) = \sin(\cos(5^x))$

c) $f_3(x) = x^{\sin(x)}$

d) $f_4(x) = x^e \cdot \cos\left(5 \cdot \sqrt{x}\right) \cdot \log_2 x$

Ableitungsregeln VI

Aufgabe 17

Finde eine Ableitungsregel für die Funktion $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Umkehrregel I

Gegeben sei ein Intervall D sowie eine auf diesem Intervall definierte, umkehrbare (d.h. bijektive) Funktion f mit den folgenden Eigenschaften:

- die Funktion f ist an der Stelle x_0 stetig und differenzierbar;
- die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 keine waagerechte Tangente, d.h., es gilt $f'(x_0) \neq 0$.

Unter diesen Voraussetzungen ist die Umkehrfunktion f^{-1} an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Umkehrregel II

Aufgabe 18

Bestimme mithilfe der Umkehrregel die Ableitungsregel für die folgende Funktion:

$$f(x) = \sqrt[5]{x}.$$