Tutorium:
Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Abschlussklausur am 18.07.2023
Teil 2

14. Juli 2023

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Die Regeln von de l'Hospital

Die Regeln von de l'Hospital I

Der Typ $\dfrac{0}{0}$

Es sei I ein Intervall und $x_0 \in I$. Die Funktionen f und g seien für alle $x \in I$ mit $x \neq x_0$ differenzierbar. Es gelte $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, $x \neq x_0$. Ferner sei $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = 0$.

Dann gilt:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right),$$

falls der rechte Grenzwert existiert bzw. gleich $+\infty$ oder $-\infty$ ist.

Analog für $x \to \infty$.

Die Regeln von de l'Hospital II

Der Typ $\dfrac{\infty}{\infty}$

Es sei I ein Intervall und $x_0 \in I$. Die Funktionen f und g seien für alle $x \in I$ mit $x \neq x_0$ differenzierbar. Es gelte $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, $x \neq x_0$. Ferner sei $\lim\limits_{x \to x_0} \left|f(x)\right| = \lim\limits_{x \to x_0} \left|g(x)\right| = \infty$.

Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right),$$

falls der rechte Grenzwert existiert bzw. gleich $+\infty$ oder $-\infty$ ist.

Analog für $x \to \infty$.

Aufgaben

Aufgabe 1

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} \right)$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)$

Aufgaben

Aufgabe 2

Zeige, dass die Funktion $f(x) = x^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$) langsamer wächst als die Funktion $g(x) = a^x$ (für $a > 1$).

Die Regeln von de l'Hospital III (optional)

Der Typ $0 \cdot \infty$

Es seien $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to x_0} \left|g(x)\right| = \infty$.

Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \Big(f(x) \cdot g(x)\Big) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\right).$$

Die Regeln von de l'Hospital IV (optional)

Der Typ $\infty - \infty$

Es sei $\lim\limits_{x \to x_0} \left| f(x) \right| = \lim\limits_{x \to x_0} \left| g(x) \right| = \infty$.

Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \Big(f(x) - g(x) \Big) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x) \cdot g(x)}} \right).$$

Die Regeln von de l'Hospital V (optional)

Die Typen 0^0, 1^∞ und ∞^0

- Typ 0^0: Es seien $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.
- Typ 1^∞: Es seien $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$ und $\lim\limits_{x \to x_0} \left|g(x)\right| = \infty$.
- Typ ∞^0: Es seien $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x)^{g(x)}\right) = \lim_{x \to x_0} \left(e^{g(x) \cdot \ln f(x)}\right) = e^{\lim\limits_{x \to x_0} \left(g(x) \cdot \ln f(x)\right)}$$

Aufgaben (optional)

Aufgabe 3

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{2}{x^2}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{x^2-4x+2}{2x+4}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5^x+1}{2\cdot 3^{x-1}}\right)$

Extremwerte

Lokales Maximum

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein *lokales Maximum*, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- Es gilt $f'(x_0) = 0$ sowie $f''(x_0) < 0$.
- Es gilt $f'(x_0) = 0$ und die Funktion f' besitzt an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von $+$ zu $-$.

Lokales Minimum

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein *lokales Minimum*, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- Es gilt $f'(x_0) = 0$ sowie $f''(x_0) > 0$.
- Es gilt $f'(x_0) = 0$ und die Funktion f' besitzt an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$.

Wendepunkte

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 einen *Wendepunkt*, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

- Es gilt $f''(x_0) = 0$ sowie $f'''(x_0) \neq 0$.
  - Gilt zudem $f'(x_0) = 0$, so handelt es sich um einen *Sattelpunkt*.
  - Gilt $f'''(x_0) < 0$, so liegt ein Übergang von konvexer zu konkaver Krümmung vor.
  - Gilt $f'''(x_0) > 0$, so liegt ein Übergang von konkaver zu konvexer Krümmung vor.

Monotonie

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f ist an der Stelle x_0

- *monoton steigend*, falls $f'(x_0) \geq 0$ gilt;
- *streng monoton steigend*, falls $f'(x_0) > 0$ gilt;
- *monoton fallend*, falls $f'(x_0) \leq 0$ gilt;
- *streng monoton fallend*, falls $f'(x_0) < 0$ gilt.

Krümmung

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion f ist an der Stelle x_0

- *linksgekrümmt/konvex*, falls $f''(x_0) \geq 0$ gilt;
- *streng linksgekrümmt/konvex*, falls $f''(x_0) > 0$ gilt;
- *rechtsgekrümmt/konkav*, falls $f''(x_0) \leq 0$ gilt;
- *streng rechtsgekrümmt/konkav*, falls $f''(x_0) < 0$ gilt.

Aufgaben

Aufgabe 4

Bestimme die maximale Fläche eines Rechtecks, das aus einem 20cm langen Stück Draht hergestellt werden kann.

Aufgaben

Aufgabe 5

Ein Sportstadion mit einer 400-Meter-Laufbahn soll so angelegt werden, dass das eingeschlossene Fußballfeld möglichst groß ist. Das Fußballfeld ist rechteckig und an das Rechteck angesetzt sind zwei Halbkreise für die Kurven der Laufbahn. Welche Seitenlängen hat das Rechteck?

Aufgaben

Aufgabe 6

Gegeben sei ein Zylinder mit der Oberfläche O. Bestimme den Radius r des Zylinders derart, dass das Volumen des Zylinders maximal wird.

Integralrechnung

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung I

Der *Fundamentalsatz der Analysis*, auch bekannt als *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*, bringt die beiden grundlegenden Konzepte der Analysis miteinander in Verbindung, nämlich das der Integration und das der Differentiation. Er sagt aus, dass Ableiten bzw. Integrieren jeweils die Umkehrung des anderen ist. Der Satz besteht aus zwei Teilen, die manchmal als erster und zweiter Hauptsatz der Analysis bezeichnet werden.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung II

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine reellwertige stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, so ist die Integralfunktion

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

differenzierbar und eine Stammfunktion von f, d. h., es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, dann gilt die Newton-Leibniz-Formel:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung II

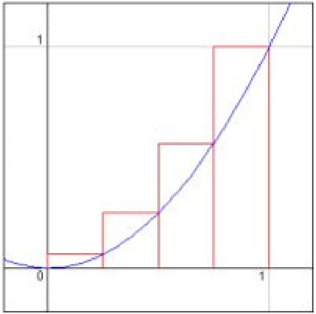
Aufgabe 7

Sei f eine stetige Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ und sei F eine Stammfunktion von f. Zeige mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

Ober- und Untersummen I

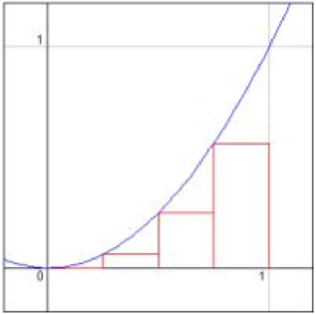
Obersumme



$$O_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

Ober- und Untersummen II

Untersumme



$$U_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

Ober- und Untersummen III

Das Integral ist der Grenzwert der Ober- bzw. Untersumme:

$$\int_a^b f(x) = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right) = \Big[F(x) \Big]_a^b$$

$$\int_a^b f(x) = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right) = \Big[F(x) \Big]_a^b$$

Insbesondere gilt:

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} U_n$$

Ober- und Untersummen IV

Aufgabe 8

Berechne die Fläche, die von der x-Achse, den beiden Geraden $x = 0$ und $x = 1$ sowie der Funktion $f(x)$ selbst eingeschlossen wird, mithilfe einer Obersumme:

$$f(x) = x^2.$$

Potenzen

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \, x^{n+1} + c$$

Wurzeln

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x} + c$$

$$\int \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}\,dx = \sqrt[n]{x} + c$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int \sqrt[m]{x^n}\,dx = \frac{m}{n+m}\,x^{\frac{n+m}{m}} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}\,dx = \frac{m}{m-n}\,x^{\frac{m-n}{m}} + c$$

Exponentialfunktionen

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\int a^x \ln a \, dx = a^x + c$$

$$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} \, a^x + c$$

Logarithmen

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{\ln a \cdot x}\, dx = \log_a|x| + c$$

$$\int \log_a e \cdot \frac{1}{x}\, dx = \log_a|x| + c$$

$$\int \ln x\, dx = x \cdot \ln x - x + c$$

$$\int \log_a x\, dx = \frac{1}{\ln a}\left(x \cdot \ln x - x\right) + c$$

Trigonometrische Funktionen I

$$\int \sin x \; dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \; dx = \sin x + c$$

$$\int -\sin x \; dx = \cos x + c$$

$$\int -\cos x \; dx = -\sin x + c$$

$$\int \tan x \; dx = -\ln\left|\cos x\right| + c$$

$$\int \cot x \; dx = \ln\left|\sin x\right| + c$$

Trigonometrische Funktionen II

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$$

$$\int \left(1 + \tan^2 x\right) \, dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sin^2 x} \, dx = \cot x + c$$

$$\int \left(-1 - \cot^2 x\right) \, dx = \cot x + c$$

Trigonometrische Funktionen III

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{-1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arccot} x + c$$

Hyperbolische Funktionen I

$$\int \sinh x \; dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x \; dx = \sinh x + c$$

$$\int \tanh x \; dx = \ln \cosh x + c$$

$$\int \coth x \; dx = \ln \left| \sinh x + c \right|$$

Hyperbolische Funktionen II

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\, dx = \tanh x + c$$

$$\int \left(1 - \tanh^2 x\right)\, dx = \tanh x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sinh^2 x}\, dx = \coth x + c$$

$$\int \left(1 - \coth^2 x\right)\, dx = \coth x + c$$

Konstante Faktoren und Summanden

Teilweise fehlt lediglich ein konstanter Faktor c, um eine Funktion direkt integrieren zu können. Dieser kann durch eine „Multiplikation mit 1“ leicht hinzugefügt werden:

$$\int f(x)\ dx = \int \frac{1}{c} \cdot c \cdot f(x)\ dx = \frac{1}{c} \int c \cdot f(x)\ dx.$$

Teilweise fehlt lediglich eine additive Konstante, um eine Funktion direkt integrieren zu können. Diese kann durch eine „Addition von 0“ leicht hinzugefügt werden:

$$\int f(x)\ dx = \int \big(f(x) + c - c\big)\ dx = \int \big(f(x) + c\big)\ dx - \int c\ dx.$$

Funktionen mit speziellem Aufbau I

Manchmal liegen Funktionen in der folgenden Form vor:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx.$$

Diese lassen sich direkt mit dem Logarithmus integrieren:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\left|f(x)\right|.$$

Funktionen mit speziellem Aufbau II

Manchmal liegen Funktionen in der folgenden Form vor:

$$\int f(x) \cdot f'(x) \; dx.$$

Diese lassen sich wie folgt direkt integrieren:

$$\int f(x) \cdot f'(x) \; dx = \frac{1}{2}\big(f(x)\big)^2.$$

Zusammengesetzte Funktionen

$$\int \Big(f(x) \pm g(x)\Big)\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$$

$$\int c \cdot f(x)\ dx = c \cdot \int f(x)\ dx$$

Partielle Integration

Bei den Regeln zur *partiellen Integration* handelt es sich um Umkehrungen der Produktregel

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

Durch Integration beider Seiten der Gleichung erhält man:

$$\int (u \cdot v)' = \int (u'v + uv')$$

$$uv = \int u'v + \int uv'$$

Anschließendes Umstellen ergibt die folgenden Regeln:

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

Partielle Integration

Aufgabe 9

Bestimme die folgenden Integrale mithilfe partieller Integration:

a) $\displaystyle\int x \cdot \cos x \; dx$

b) $\displaystyle\int x^2 \cdot e^x \; dx$

c) $\displaystyle\int x^5 \cdot \ln x \; dx$

Definition I

Integration durch Substitution macht Verwendung von der Kettenregel:

$$\left[F\left(g(x)\right)\right]' = f\left(g(x)\right) \cdot g'(x).$$

Durch Integrieren ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int \left[F\left(g(x)\right)\right]' \, dx &= \int f\left(g(x)\right) \cdot g'(x) \, dx \\ F\left(g(x)\right) &= \int f\left(g(x)\right) \cdot g'(x) \, dx. \end{aligned}$$

Definition II

Es sei f eine auf dem Intervall I stetige Funktion und es soll $\displaystyle\int f(x)\;dx$ berechnet werden. Für ein Intervall I' sei $g : I' \to I$ eine bijektive Funktion mit stetiger Ableitung. Dann lässt sich $\displaystyle\int f(x)\;dx$ berechnen, indem man

1. $\displaystyle\int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\;dt$ ermittelt;
2. im Ergebnis $t = g^{-1}(x)$ substituiert („Resubstitution").

Formelmäßig drückt man dies häufig auch durch die folgende Schreibweise aus:

$$\int f(x)\;dx = \left[\int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\;dt\right]_{t=g^{-1}(x)}$$

Aufgaben

Aufgabe 10

Berechne die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int\limits_0^1 x \cdot \sqrt{x^2+1}\ dx$

b) $\displaystyle\int e^{\sqrt{2x-1}}\ dx$

c) $\displaystyle\int \sin(x) \cdot \cos(x)\ dx$

Viel Erfolg bei der Klausur :)