Vorkurs: Mathematik für Informatiker

Wintersemester 2012/13
Teil 1

Steven Köhler
mathe@stevenkoehler.de
mathe.stevenkoehler.de

Jennifer Maier
jennifer.maier@math.uni-hamburg.de

Marcel Morisse
morisse@informatik.uni-hamburg.de

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

© 2012 Steven Köhler

Kapitel I

Mengen

Definition

Eine *Menge* ist eine ungeordnete Ansammlung von Elementen.

- Die Reihenfolge der Elemente spielt keine Rolle.
- Jedes Element ist genau einmal enthalten.

Dürfen die Elemente mehrfach vorkommen, so spricht man von einer *Multimenge*.

Enthält die Menge keine Elemente, so nennt man sie die *leere Menge* und bezeichnet sie mit $\emptyset$.

Endliche & unendliche Mengen I

Enthält die Menge eine endliche Anzahl an Elementen, so spricht man von einer *endlichen Menge*.

Analog: Enthält die Menge eine unendliche Anzahl an Elementen, so spricht man von einer *unendlichen Menge*.

Endliche & unendliche Mengen II

Beispiele für endliche Mengen:

- $A = \left\{1, 2, 3, 4\right\}$
- $B = \left\{a, b, c\right\}$
- $C = \left\{x \in \mathbb{N} \mid 23 \leq x \leq 42\right\}$

Beispiele für unendliche Mengen:

- $D = \left\{1, 2, 3, \ldots\right\}$
- $E = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist gerade}\right\}$

Elemente einer Menge

Ist ein Element a in einer Menge A enthalten, so schreibt man:

$$a \in A.$$

Ist ein Element a in einer Menge A nicht enthalten, so schreibt man:

$$a \notin A.$$

Mächtigkeit einer Menge

Unter der *Mächtigkeit* $|M|$ einer (endlichen) Menge M versteht man die Anzahl der in M enthaltenen Elemente. Die Mächtigkeit einer Menge wird auch als *Kardinalität* bezeichnet.

Für die Mächtigkeit einer unendlichen Menge schreibt man häufig ∞.

Beispiele:

$$A = \left\{11, 13, 17, 19\right\}$$

$$\left|A\right| = 4$$

$$B = \left\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\right\}$$

$$\left|B\right| = \infty$$

Vergleichen von Mengen I

Mengen können miteinander verglichen werden.

- *Inklusion*: $A \subseteq B$

  Die Menge A ist vollständig in der Menge B enthalten. Es ist außerdem möglich, dass A und B identisch sind.
  Sprechweise: A ist eine *Teilmenge* von B.

- *Gleichheit*: $A = B$

  Die Mengen A und B sind identisch. Dies ist genau dann der Fall, wenn sowohl $A \subseteq B$ als auch $B \subseteq A$ gilt.
  Sprechweise: A ist gleich B.

Vergleichen von Mengen II

- *strenge Inklusion*: $A \subset B$

  Die Menge A ist vollständig in der Menge B enthalten. Die Mengen A und B sind jedoch nicht identisch. Jedes Element $a \in A$ ist folglich in B enthalten, es gibt jedoch mindestens ein Element $b \in B$, dass nicht in der Menge A enthalten ist.
  Sprechweise: A ist eine *echte Teilmenge* von B.

Trifft keine der genannten Eigenschaften zu, so sind die Mengen *unvergleichbar*.

Operationen auf Mengen I

- *Vereinigung*: $A \cup B$

In der Menge $A \cup B$ sind alle Elemente enthalten, die entweder in der Menge A, in der Menge B oder in beiden Mengen vorkommen:

$$A \cup B = \Big\{x \;\Big|\; x \in A \text{ oder } x \in B\Big\}.$$

Die *Vereinigungsmenge* von $n \geq 2$ Mengen $A_1, \ldots, A_n$ kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \\ &= \Big\{x \;\Big|\; x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\Big\}. \end{aligned}$$

Operationen auf Mengen II

- *Schnitt*: $A \cap B$

In der Menge $A \cap B$ sind alle Elemente enthalten, die sowohl in der Menge A als auch in der Menge B vorkommen:

$$A \cap B = \Big\{x \;\Big|\; x \in A \text{ und } x \in B\Big\}.$$

Die *Schnittmenge* von $n \geq 2$ Mengen $A_1, \ldots, A_n$ kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \\ &= \Big\{x \;\Big|\; x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\Big\}. \end{aligned}$$

Operationen auf Mengen III

- <u>*Exklusion*: $A \setminus B$</u>

  In der Menge $A \setminus B$ sind alle Elemente enthalten, die in der Menge A, aber nicht in der Menge B vorkommen:

  $$A \setminus B = \Big\{x \;\Big|\; x \in A \text{ und } x \notin B\Big\}.$$

- <u>*Symmetrische Differenz*: $A \triangle B$</u>

  In der Menge $A \triangle B$ sind alle Elemente enthalten, die entweder nur in der Menge A oder nur in der Menge B vorkommen:

  $$A \triangle B = \Big(A \setminus B\Big) \cup \Big(B \setminus A\Big)$$

Operationen auf Mengen IV

- <u>*Potenzmenge*: $\mathcal{P}(A)$</u>

  Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ ist die Menge aller Teilmengen der Menge A. Enthält die Menge A insgesamt $|A| = n$ Elemente, so enthält die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ insgesamt $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ Elemente.

Operationen auf Mengen V

Beispiel:

Es seien die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$ gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \Big\{1, 2, 3, 4\Big\} \\ A \cap B &= \Big\{2, 3\Big\} \\ A \setminus B &= \Big\{1\Big\} \\ A \triangle B &= \Big\{1, 4\Big\} \\ \mathcal{P}(A) &= \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\Big\} \end{aligned}$$

Operationen auf Mengen VI

Es seien A und B zwei Mengen. Das *kartesische Produkt* dieser Mengen ist wie folgt definiert:

$$A \times B = \Big\{(a, b) \;\big|\; a \in A \text{ und } b \in B\Big\}.$$

Es seien A, B und C drei Mengen. Das *kartesische Produkt* dieser Mengen ist wie folgt definiert:

$$A \times B \times C = \Big\{(a, b, c) \;\big|\; a \in A,\ b \in B \text{ und } c \in C\Big\}.$$

Analog definiert man das *kartesische Produkt* für eine beliebige Anzahl von Mengen $M_1, \ldots, M_n$:

$$M_1 \times \ldots \times M_n = \Big\{(m_1, \ldots, m_n) \;\big|\; m_1 \in M_1,\ \ldots,\ m_n \in M_n\Big\}.$$

Aufgaben

Aufgabe I-1

Es seien die folgenden Mengen $A = \{5, 7, 9\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ und $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ gegeben. Bestimme:

a) $A \cup B$, $A \cap C$, $C \setminus A$ sowie $A \triangle B$

b) $A \cap B \cap C$

c) $\mathcal{P}(B)$

d) $A \times B$

Aufgabe I-2

Bestimme die Mengen $\mathcal{P}(\emptyset)$ sowie $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$!

Kapitel II

Zahlenbereiche

Natürliche Zahlen

Man definiert die Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$ als die Menge der *natürlichen Zahlen* und bezeichnet diese mit $\mathbb{N}$.

Achtung: Je nach Lehrbuch/Dozent wird die 0 zu den natürlichen Zahlen gezählt oder nicht zu den natürlichen Zahlen gezählt. Fragt deshalb am besten noch einmal nach.

Ganze Zahlen

Ausgehend von den bereits definierten natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ definiert man die Menge der *ganzen Zahlen* und bezeichnet diese mit $\mathbb{Z}$:

- Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ fügt man der Menge $\mathbb{Z}$ sowohl n als auch $-n$ hinzu.
- Außerdem fügt man der Menge $\mathbb{Z}$ die Zahl 0 hinzu.

Es ergibt sich die folgende Menge $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \Big\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\Big\}.$$

Rationale Zahlen

Den nächsten Zahlenbereich bilden die mit $\mathbb{Q}$ bezeichneten *rationalen Zahlen*. Diese sind wie folgt definiert:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n \neq 0 \right\}.$$

Die rationalen Zahlen stellen folglich die Menge aller Brüche dar, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind.

Das Rechnen mit Brüchen wird im nächsten Kapitel besprochen.

Reelle Zahlen

Es gibt (viele) Zahlen, die nicht in der Menge der rationalen Zahlen enthalten sind. Um diese beschreiben zu können, werden die mit $\mathbb{R}$ bezeichneten *reellen Zahlen* eingeführt.

Diese können als Punkte auf einer *Zahlengeraden* veranschaulicht werden. Wie diese genau definiert sind, wollen wir an dieser Stelle nicht besprechen.

Beispiele:

- alle natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen
- die Kreiszahl π
- viele Wurzeln wie $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ oder $\sqrt[3]{4}$

Irrationale Zahlen

Reelle Zahlen, die keine rationalen Zahlen sind (z.B. $\sqrt{2}$, π oder e), werden *irrationale Zahlen* genannt und können mit $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ bezeichnet werden.

Einen Beweis, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist, werden wir uns später im Kapitel über Beweistechniken näher ansehen.

Komplexe Zahlen

Viele technische oder physikalische Vorgänge können im Bereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht beschrieben werden.

Um dies dennoch zu ermöglichen, wurden die *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ eingeführt. Diese definieren u.a. die Konstante i, die der folgenden Eigenschaft genügt:

$$i^2 = -1.$$

Damit ist es möglich, physikalische/technische Systeme mit mathematischen Mitteln exakt zu beschreiben. Komplexe Zahlen werden im Laufe des Studiums behandelt.

Kapitel III

Rechnen mit Brüchen

Kürzen I

Im Folgenden seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und es gelte $c \neq 0$.

Es ist möglich, gemeinsame Faktoren (ungleich 0), die sowohl im Zähler als auch im Nenner eines Bruchs vorkommen, zu *kürzen*. Allgemein gilt:

$$\frac{c \cdot a}{c \cdot b} = \frac{a}{b} \quad \text{(für } c \neq 0\text{)}.$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} \frac{2}{4} &= \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \\ \frac{14}{21} &= \frac{7 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{2}{3} \\ \frac{a^2 b}{ab^2} &= \frac{ab \cdot a}{ab \cdot b} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Kürzen II

Es dürfen ausschließlich gemeinsame Faktoren gekürzt werden, nicht jedoch Differenzen oder Summen. Diese müssen, sofern möglich, vor dem Kürzen in eine Darstellung als Produkt überführt werden.

Beispiel:

$$\frac{ac+2bc}{cd-ec} = \frac{c\cdot(a+2b)}{c\cdot(d-e)} = \frac{a+2b}{d-e}$$
$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a+b)}{(a-b)}$$

Merke:

- "Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen."

Erweitern

Im Folgenden seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und es gelte $c \neq 0$.

Es ist möglich, den Zähler und den Nenner eines Bruchs mit demselben Faktor (ungleich 0) zu multiplizieren (den Bruch zu *erweitern*), ohne den Wert des Bruchs zu verändern. Allgemein gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{c\cdot a}{c\cdot b} \quad (\text{für } c \neq 0).$$

Beispiele:

$$\frac{1}{3} = \frac{2\cdot 1}{2\cdot 3} = \frac{2}{6}$$
$$\frac{2}{4} = \frac{8\cdot 2}{8\cdot 4} = \frac{16}{32}$$
$$\frac{a^2}{b} = \frac{ab^2\cdot a^2}{ab^2\cdot b} = \frac{a^3b^2}{ab^3}$$

Addition & Subtraktion I

Im Folgenden seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ und es gelte $c \neq 0$ sowie $d \neq 0$. Es können 2 mögliche Fälle auftreten:

- Fall 1: gleiche Nenner

  Die beiden Brüche haben denselben Nenner, es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{b}{c} &= \frac{a+b}{c} \\ \frac{a}{c} - \frac{b}{c} &= \frac{a-b}{c} \end{aligned}$$

Addition & Subtraktion II

- Fall 2: verschiedene Nenner

  Die beiden Brüche haben nicht denselben Nenner, sie müssen vor der Addition/Subtraktion *gleichnamig* gemacht werden (auf denselben Nenner gebracht werden). Es gilt:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$$

  Oft wird beim gleichnamig machen das *kleinste gemeinsame Vielfache* (kgV) der Nenner als gemeinsamer Nenner verwendet; selbstverständlich kann auch jedes andere gemeinsame Vielfache verwendet werden.

Multiplikation

Im Folgenden seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ und es gelte $b \neq 0$ sowie $d \neq 0$.

Beim Multiplizieren zweier Brüche werden sowohl die Zähler als auch die Nenner der beiden Brüche miteinander multipliziert. Es folgt:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \ .$$

Division

Im Folgenden seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ und es gelte $b \neq 0$, $c \neq 0$ und $d \neq 0$.

Die Division von Brüchen wird auf die Multiplikation von Brüchen zurückgeführt. Hierzu wird der erste Bruch (der *Divident*) mit dem Umkehrwert (dem *Reziproken*) des zweiten Bruchs (dem *Divisor*) multipliziert. Es folgt

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \ .$$

Aufgaben

Aufgabe III-1

Berechne die folgenden Werte. Gib die Ergebnisse (sofern möglich) in gekürzter Form an!

$a)\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4} \qquad b)\ \frac{1}{8}-\frac{1}{24}+\frac{10}{12} \qquad c)\ \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}-\frac{3}{10} \qquad d)\ \left(\frac{6}{7}:\frac{12}{10}\right)\cdot 2+\frac{3}{-7}$

Aufgaben

Aufgabe III-2

Vereinfache die folgenden Brüche.

$a)\ \frac{3x^5}{2x^2} \qquad b)\ \frac{a^6}{4a^5} \qquad c)\ \frac{-(ab)^2}{(-6ab)^2} \qquad d)\ \frac{100x^2y^3}{(-2xy)^2}$

$e)\ \frac{(-ab)^4}{ab^4} \qquad f)\ \frac{-a^3b^7}{(ab)^7} \qquad g)\ \frac{x^2(ty)^3}{xt^3y^2} \qquad h)\ \frac{a^3(b^2c)^5}{(a^3c)^2}$

Aufgaben

Aufgabe III-3

Berechne die folgenden Werte. Gib die Ergebnisse in gekürzter Form an!

a) $\dfrac{3}{2a^2} - \dfrac{4ab-1}{4ab} + 2$

b) $\dfrac{x}{x^2-xy} - \dfrac{y}{x^2+xy} - \dfrac{x}{x^2-y^2}$

c) $\dfrac{a-3b}{5a+1} \cdot \dfrac{25a^2-1}{a^2-6ab+9b^2}$

d) $\dfrac{2x-3}{5x} : \dfrac{4x^2-9}{10x^2}$

Kapitel IV

Wurzeln, Potenzen & Logarithmen

Definition von Potenzen I

Ist $a \in \mathbb{R}$ (eine reelle Zahl) und $n \in \mathbb{N}$ (eine natürliche Zahl), so definiert man eine *Potenz* wie folgt:

$$\begin{aligned} a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \end{aligned}$$

Ferner definiert man:

$$a^0 = 1.$$

Es ist leicht einzusehen, dass hierdurch auch der Fall abgedeckt ist, dass $n \in \mathbb{Z}$ gilt, n also eine ganze Zahl ist.

Definition von Potenzen II

Wie zuvor sei a eine reelle Zahl und $r = \frac{p}{q}$ sei eine rationale Zahl. Ohne Beweis setzen wir voraus, dass die *q-te Wurzel* $\sqrt[q]{a}$ von a existiert. Dann definiert man:

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p.$$

Beispiel zu Potenzen I

Potenzen finden immer dann Anwendung, wenn ein *exponentielles Wachstum* beschrieben werden soll; bekannte Beispiele aus der Schule sind der Zinseszins oder Zerfallsprozesse.

Aufgabe

Bei der Geburt ihres Kindes legen die Eltern einen Betrag von 2.500 Euro auf einem Konto an. Der jährliche Zinssatz beträgt 3,5%. Wie viel Geld befindet sich nach einem, nach zwei bzw. nach 18 Jahren auf dem Konto?

Beispiel zu Potenzen II

Lösung

Es gilt, dass das Guthaben auf dem Konto jedes Jahr um 3,5% wächst. Der Betrag auf dem Konto wächst also jedes Jahr um den Faktor 1,035. Nach n Jahren hat sich der Betrag wie folgt verändert:

$$\text{Betrag} = 2.500 \text{ Euro } \cdot 1,035^n$$

Es folgt:

n	Betrag in Euro
0	2500, 00
1	2587, 50
2	2678, 06
⋮	⋮
18	4643, 72

Aufgaben

Aufgabe IV-1

Berechne die folgenden Potenzen. (Ohne Taschenrechner!)

$$a)\ 3^3 \qquad b)\ (-3)^2 \qquad c)\ (-5)^3$$

$$d)\ -2^4 \qquad e)\ (-2\cdot 3)^2 \qquad f)\ -(5\cdot 3)^2$$

Definition von Wurzeln

Es sei a eine positive reelle Zahl oder 0. Unter der *n-ten Wurzel* von a versteht man den (positiven) Wert $\sqrt[n]{a}$, für den die folgende Eigenschaft gilt:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Gibt es sowohl eine positive als auch eine negative Lösung, so ist die Wurzel stets die positive Lösung.

Häufig wird die *Quadratwurzel* verwendet. Statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man hier typischerweise nur $\sqrt{a}$.

Beispiele:

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{4}, \quad \sqrt[3]{8}, \quad \sqrt[5]{\pi}$$

Aufgaben

Aufgabe IV-2

Vereinfache so weit wie möglich:

a) $7\sqrt{x} - 6\sqrt{y} + 3\sqrt{x} - 4\sqrt{y}$

b) $\sqrt{\frac{11}{60}} \cdot \sqrt{\frac{12}{55}}$

c) $\sqrt{0,1} \cdot \sqrt{0,121}$

d) $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$

Definition von Logarithmen I

Die Anwendung des *Logarithmus*, das *Logarithmieren*, ist eine Umkehrfunktion des Potenzierens.

Mithilfe des Logarithmus lässt sich bestimmen, mit welchem *Exponenten* c man eine gegebene *Basis* a potenzieren muss, um das Ergebnis b zu erhalten:

$$\log_a b = c.$$

Die beiden nachfolgenden Aussagen sind äquivalent:

$$\begin{aligned} a^c &= b \\ \log_a b &= c. \end{aligned}$$

Definition von Logarithmen II

Beispiele für Logarithmen:

- $\log_2 8 = 3$
- $\log_3 243 = 5$
- $\ln e^{-2} = -2$

Typische Vertreter:

- *logarithmus dualis*: $\log_2$ bzw. ld
- *logarithmus naturalis*: $\log_e$ bzw. ln
- $\log_{10}$

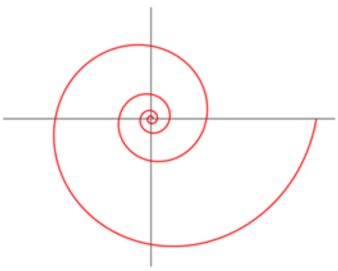
Definition von Logarithmen III

Frage:

Sind Potenzen und Logarithmen lediglich eine "mathematische Spielerei" oder haben sie in der Natur eine praktische Relevanz?

Antwort:

Nein! Es ist keine mathematische Spielerei. Sie kommen in der Natur häufig vor (z.B. als *logarithmische Spiralen*).



Logarithmische Spiralen I

Schnitt einer Nautilus-Schale
Quelle: Wikipedia

Logarithmische Spiralen II

Tiefdruckwirbel über Island
Quelle: Wikipedia

Logarithmische Spiralen III

Die Whirlpool-Galaxie (NGC 5194/5195)
Quelle: Wikipedia

Beispiel zu Logarithmen I

Aufgabe

Ernst gewinnt in einem Preisausschreiben 5.000 Euro. Er entscheidet sich, das Geld anzulegen und bekommt jährlich 4% Zinsen. Nach wie vielen Jahren hat sich sein Geld verdoppelt?

Beispiel zu Logarithmen II

Lösung

Es gilt, die folgende Gleichung zu lösen:

$$5.000 \cdot 1,04^n = 10.000.$$

Hieraus ergibt sich direkt:

$$\begin{aligned} 1,04^n &= 2 \\ n &= \log_{1,04} 2. \end{aligned}$$

Beispiel zu Logarithmen III

Hier stößt man sofort auf das nächste Problem: Wie berechnet man den Logarithmus zur Basis 1,04?

Die Lösung ist einfach, denn jeder Logarithmus lässt sich durch einen (anderen) Logarithmus mit einer beliebigen Basis darstellen. Es gilt die folgende allgemeine Formel:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

Beispiel zu Logarithmen IV

Für unser Beispiel bedeutet dies:

$$\begin{aligned} \log_{1,04} 2 &= \frac{\ln 2}{\ln 1,04} \\ &= 17,672987... \end{aligned}$$

Das Vermögen von Ernst wird sich also in etwa 17,67 Jahren verdoppeln.

Beispiel zu Logarithmen V

Ein alternativer Lösungsweg ist der folgende:

$$\begin{aligned} 5000 \cdot 1,04^n &= 10000 \\ 1,04^n &= 2 \\ \ln 1,04^n &= \ln 2 \\ n \cdot \ln 1,04 &= \ln 2 \\ n &= \frac{\ln 2}{\ln 1,04} \\ &= 17,672987... \end{aligned}$$

Aufgaben

Aufgabe IV-3

Bestimme ohne Taschenrechner:

$a)\ r = \log_8 64 \qquad b)\ \log_r 125 = 3 \qquad c)\ \log_{10} r = 3 \qquad d)\ \log_2 r = -4$

Aufgabe IV-4

Bestimme ohne Taschenrechner:

$$a)\ r = \log_2 3072 \qquad b)\ r = \log_7 343 \qquad c)\ \ln e^{-1} = r$$

$$d)\ r = \log_2 32 - \log_2 16 + \log_2 8 \qquad e)\ r = \log_2 \sqrt{8}$$

Aufgaben

Aufgabe IV-5

Täglich hört man in der Presse von der Teuerungsrate. Sie besagt, um wie viel das Leben innerhalb eines Jahres teurer geworden ist, d.h. das Geld weniger wert wurde. Man spricht auch von der Inflationsrate. Angenommen, die Inflationsrate beträgt 2%.

a) Wie lange dauert es, bis 2000 Euro nur noch die Kaufkraft von 1000 Euro haben?

b) Benötigt man zur Berechnung der “Halbwertszeit” des Geldes eine konkrete Startsumme wie in Aufgabe a)?

c) Unter welcher Annahme ist die Rechnung sinnvoll?

Aufgaben

Aufgabe IV-6

Die Halbwertszeit von Radium 88 beträgt 1600 Jahre. Wie lange dauert es, bis 10g zu 1,25g zerfallen sind? Erstelle zunächst eine entsprechende Funktionsgleichung.

Kapitel V

Rechenregeln

© 2012 Steven Köhler

Rechenregeln für Brüche

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad+bc}{bd} \\
\frac{a}{b} - \frac{c}{d} &= \frac{ad-bc}{bd} \\
\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \\
\frac{a}{b} : \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \\
\frac{a}{b} &= \frac{c \cdot a}{c \cdot b} \quad (c \neq 0)
\end{aligned}$$

Rechenregeln für Potenzen

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Rechenregeln für Wurzeln I

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^m = \sqrt{a^m}$$

$$a^{\frac{m}{2}} = \sqrt{a^m}$$
$$a^{-\frac{m}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a^m}}$$

Rechenregeln für Wurzeln II

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$
$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Rechenregeln für Logarithmen

$$\log_a n \cdot m = \log_a n + \log_a m$$
$$\log_a \frac{n}{m} = \log_a n - \log_a m$$

$$\log_a n^m = m \cdot \log_a n$$
$$\log_a \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \cdot \log_a n$$

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$
$$\log_a n = \log_a b \cdot \log_b n$$

Aufgaben I

Aufgabe V-1

Vereinfache die folgenden Terme!

a) $a^7 \cdot a^4$ *b)* $(5x)(4x^6)$ *c)* $(-3z^4)(-3z^5)$ *d)* $(20x^5)(-x^3)(x^{-2})$

Aufgabe V-2

Vereinfache die folgenden Terme!

a) $a^{-3x}a^{2x}$ *b)* $\frac{x^{2-b}}{x^b}$ *c)* $3x^0y^{-2}$ *d)* $\frac{a^{2-x}b^{6+y}}{a^{6-x}b}$

Aufgabe V-3

Vereinfache die folgenden Terme!

a) $\sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[6]{x^{18}}$ *b)* $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^9}}$ *c)* $\sqrt[7]{a^{10}} : \sqrt[4]{a^5}$

Aufgaben II

Aufgabe V-4

Vereinfache die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich!

a) $\log \frac{a}{2b}$

b) $\log a^3 + \log \sqrt{b} - \log ab^2$

c) $\log \sqrt[3]{a^2} - \log a + 2 \log \frac{1}{7} a$

d) $\log \dfrac{a^2 b^{-1} c}{a c^{-3} b}$

e) $\log \left(\dfrac{a^2 c + ac}{ab} - \dfrac{c}{b} \right)$