Mathematik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

Steven Köhler

Wintersemester 2013/14
Aufgaben zur Vorbereitung der Bonusklausur am 07.12.2013

1. Entscheide für die folgenden Abbildungen, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Gib in jedem Fall eine (kurze) Begründung.

a) $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = \big(n-2\big)^2$
b) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(n) = 42n - 23$
c) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $h(n) = \big((n-3)^2, n^2\big)$
d) $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $u(a,b) = \big(ba, 5a+1\big)$
e) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $v(n,m) = 7n - m$
f) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f(x,y) = \big(xy^3, xy^3 - 2y - 9, (y^2-5)x\big)$

2. Beweise durch vollständige Induktion!

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $8 \mid \big(3^{2n} + 7\big)$.
b) Für alle $n \in \mathbb{N} \cup \big\{0\big\}$ gilt: $\sum\limits_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$.
d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt: $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$.
e) Für alle $n \in \mathbb{N} \cup \big\{0\big\}$ gilt: $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

3. Es sei $M = \big\{1, 2\big\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Welche sind falsch?

(i)	$1 \in \mathcal{P}(M)$	(vi)	$\big\{\{1\}, \{3\}\big\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$
(ii)	$2 \subseteq \mathcal{P}(M)$	(vii)	$\big\{\{1\}, \{2\}\big\} \subseteq \mathcal{P}(M)$
(iii)	$\big\{1, 2\big\} \in \mathcal{P}(M)$	(viii)	$\big\{(1,2)\big\} \subseteq \mathcal{P}(M)$
(iv)	$\big\{1, 2\big\} \subseteq \mathcal{P}(M)$	(ix)	$\lvert\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))\rvert = 2 + \sum\limits_{i=1}^{15} \binom{16}{i}$
(v)	$\big\{1, \{1\}\big\} \in \mathcal{P}(M)$	(x)	$\lvert\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))\rvert = 2 + \sum\limits_{i=1}^{3} \binom{4}{i}$

4. Wahr oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung.

a) $31 \equiv 65 \pmod{17}$
b) $42 \equiv 23 \pmod{11}$
c) $202 \equiv 101 \pmod{47}$
d) $-147 \equiv 312 \pmod{3}$
e) $29 \equiv 59 \pmod{23}$

5. Beweise oder widerlege.

a) Die Zahlen 224 und 613 sind teilerfremd.

b) Die Zahlen 247 und 312 sind teilerfremd.

6. Es seien $A = \{a_1, \ldots, a_7\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_9\}$ mit $|A| = 7$ und $|B| = 9$.

a) Wie viele Abbildungen $A \to B$ gibt es?

b) Wie viele dieser Abbildungen sind injektiv?

c) Wie viele dieser Abbildungen sind surjektiv?

d) Wie viele dieser Abbildungen sind injektiv, wenn zusätzlich $f(a_1) \neq f(a_2)$ gelten soll?

e) Wie viele dieser Abbildungen sind injektiv, wenn zusätzlich $f(a_1) \neq f(a_2)$ sowie $f(a_1) = f(a_3)$ gelten soll?

f) Wie viele Abbildungen gibt es, für die $f(a_1) \neq f(a_2)$ sowie $f(a_1) \neq f(a_3)$ gilt?

7. a) In einer Urne befinden sich 9 unterscheidbare Kugeln. Es wird 5 mal gezogen. Wie viele mögliche Ergebnisse gibt es, wenn

(i) die Reihenfolge der gezogenen Kugeln berücksichtigt wird?

(ii) die Reihenfolge der gezogenen Kugeln egal ist?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, im Lotto exakt 3 richtige Gewinnzahlen anzukreuzen?

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, im Lotto mindestens 5 richtige Gewinnzahlen anzukreuzen?

d) Wie viele sinnvolle oder sinnlose Wörter lassen sich aus den Buchstaben des Wortes *SEETERRASSE* bilden?

e) Für $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2k$: Wie viele Möglichkeiten gibt es, insgesamt n Bonbons auf k Kinder derart zu verteilen, dass jedes Kind mindestens zwei Bonbons erhält?

f) Welchen Koeffizienten besitzt a^6b^3 in $\big(a+b\big)^9$?

g) Welchen Koeffizienten besitzt $x^2z^5w^5$ in $\big(x+y+z+w\big)^{12}$?

8. Zeige mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{i}{1} = \binom{n+1}{n-1}.$$

9. Es sei R die folgende auf der Menge $A = \big\{a, b, c, d\big\}$ definierte Relation:

$$R = \Big\{(a,a), (a,b), (b,b), (c,a), (d,a), (b,a), (a,d), (d,d)\Big\}.$$

a) Entscheide, welche der folgenden Eigenschaften auf die Relation zutreffen. Gib jeweils eine kurze Begründung.

(i) symmetrisch

(ii) antisymmetrisch

(iii) reflexiv

(iv) irreflexiv

(v) transitiv

b) Ist R eine Ordnungs- oder eine Äquivalenzrelation?

10. Es sei $A = \big\{1, 2, 3, 4\big\}$.

a) Gib eine Relation R_a über der Menge A an, die reflexiv, aber nicht transitiv ist.

b) Gib eine Relation R_b über der Menge A an, die symmetrisch, transitiv und nicht irreflexiv ist.

c) Gib eine Relation R_c über der Menge A an, die irreflexiv und weder symmetrisch noch antisymmetrisch ist. Dabei soll $|R_c| \geq 5$ gelten.

d) Gib eine Relation R_d über der Menge A an, die weder Ordnungs- noch Äquivalenzrelation ist. Dabei soll $|R_d| \leq 3$ gelten.

11. Es seien $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ zwei Mengen.

a) Wie viele binäre Relationen R_a über der Menge A gibt es?

b) Wie viele ternäre Relationen R_b über A, B, A gibt es?

c) Wie viele der Relationen aus a) sind reflexiv?

d) Wie viele der Relationen aus a) sind symmetrisch?

12. Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Gib an, welche dieser Matrizen miteinander multipliziert werden können (Das Berechnen der Produkte ist nicht Teil dieser Aufgabe.)

b) Berechne, falls existent, die folgenden Produkte: AB, BA^T, CD und DC.

c) Welche Voraussetzungen müssen zwei Matrizen erfüllen, damit sie multipliziert werden können?