

Mathematik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

Steven Köhler

Wintersemester 2013/14

Aufgaben zur Vorbereitung der Bonusklausur am 25.01.2014

1. Bestimme, falls möglich, das multiplikative Inverse. Gib im Falle der Nicht-Existenz eine (kurze) Begründung, weshalb das Inverse nicht existiert.

- a) 23 in \mathbb{Z}_{149}
- b) 54 in \mathbb{Z}_{966}
- c) 1336 in \mathbb{Z}_{1337}

2. a) Bestimme den Rest von 5^{964} bei Division durch 23.
b) Bestimme den Rest von 4^{153} bei Division durch 42.

3. Eine Permutation $\pi \in S_9$ sei wie folgt definiert:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 7 & 4 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

- a) Gib π in Zykelschreibweise an.
- b) Gib π als Nacheinanderausführung von Transpositionen an.
- c) Ist π eine gerade oder eine ungerade Permutation?
- d) Bestimme $\text{sign } \pi$.
- e) Entscheide, ob durch die folgende Permutation $\rho \in S_9$ dieselbe Permutation wie durch π beschrieben wird:

$$\rho = (1, 2)(2, 3)(1, 3)(4, 2)(9, 8)(4, 6)(1, 2)(1, 6)(2, 1)(2, 5)(8, 3)(3, 9)(9, 8).$$

- f) Entscheide, ob durch π und φ dieselbe Permutation beschrieben ist:

$$\pi = (1, 2)(3, 4)(1, 3)(2, 4)(1, 4)(2, 3)$$

$$\varphi = (1, 3)(2, 4)(1, 2)(2, 4)(1, 3)(2, 3).$$

4. G sei ein ungerichteter Graph mit 123 Knoten. In G besitzen 16 Knoten den Grad 1, 10 Knoten besitzen Grad 3, 55 Knoten besitzen Grad 5; die restlichen Knoten besitzen Grad 7. Wie viele Kanten besitzt der Graph G ?
5. Beweise durch vollständige Induktion, dass der Hyperwürfel Q_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ einen Hamiltonkreis besitzt.
6. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Der Graph H_n sei wie folgt definiert: Die Knotenmenge von H_n sei die Menge aller n -Tupel (x_1, \dots, x_n) mit $x_i \in \{0, 1, 2\}$ (für $i = 1, \dots, n$). Zwei Knoten seien genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie sich an genau 2 Stellen unterscheiden.
- a) Wie viele Knoten besitzt der Graph H_n ?
 - b) Wie viele Kanten besitzt der Graph H_n ?
7. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Der ungerichtete Graph H bestehe aus zwei Zusammenhangskomponenten H_1 und H_2 . Der Teilgraph H_1 sei ein vollständiger Graph mit n Knoten, der Teilgraph H_2 sei ein Baum mit insgesamt $2n$ Knoten. Der Graph G entsteht aus H dadurch, dass man weitere Kanten wie folgt zu H hinzufügt: Man verbindet jeden Knoten von H_1 mit jedem Knoten von H_2 durch eine Kante.

- a) Wie viele Kanten besitzt der Graph G ?
- b) Besitzt der Graph G einen Hamiltonkreis? Falls ja, so ist eine Konstruktionsvorschrift für einen Hamiltonkreis anzugeben. Falls nein, wieso nicht?
- c) Begründe, weshalb der Graph G im Allgemeinen keine Eulersche Linie besitzt.

8. Wahr oder falsch? Gib jeweils eine (kurze) Begründung.

- (i) Jeder vollständige Graph besitzt einen Hamiltonkreis.
- (ii) In einem Graphen ist die Summe aller Knotengrade stets gerade.
- (iii) Ein ungerichteter Graph besitzt genau dann eine Eulersche Linie, wenn jeder Knoten einen geraden Grad besitzt.
- (iv) Es existiert kein ungerichteter Graph mit n Knoten und n^2 Kanten.
- (v) Das „Haus des Nikolaus“ besitzt eine Eulersche Linie.
- (vi) Es sei $G = (V, E)$. Gilt $c(G - A) < |A|$ für alle Teilmengen $A \subseteq V$, so besitzt der Graph G einen Hamiltonkreis.

9. Es seien die folgenden beiden Polynome gegeben:

$$\begin{aligned} a(x) &= 4x^3 + 2x + 1 \\ b(x) &= 5x^2 + x + 3. \end{aligned}$$

- a) Bestimme $a(x) + b(x)$ sowie $a(x) \cdot b(x)$.
- b) Bestimme $a(x) - b(x)$ und $a(x) : b(x)$ unter der Bedingung, dass sämtliche Koeffizienten aus \mathbb{Z}_7 stammen.

10. Es seien die folgenden beiden Polynome gegeben:

$$\begin{aligned} a(x) &= x^9 + 2x^7 - 3x^6 + 2x^4 - x^3 + 5x^2 + x - 23 \\ b(x) &= x^{10} - 5x^9 + 2x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 - x + 42. \end{aligned}$$

- a) Bestimme den Grad des Polynoms $a(x) \cdot b(x)$.
- b) Welchen Koeffizienten besitzt x^{13} im Produkt $a(x) \cdot b(x)$?

11. Wahr oder falsch? Gib jeweils eine (kurze) Begründung.

- (i) $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=2}^{n+1} a_{j-1}$
- (ii) $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=0}^{n+1} a_{k+1}$
- (iii) $\sum_{k=1}^n k \cdot n^k = \sum_{k=0}^n k \cdot n^k$
- (iv) $\sum_{k=4}^{10} b_k = \sum_{k=4}^{10} b_{10-k}$