Mathematik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

Steven Köhler

Wintersemester 2012/13

Aufgaben zur Vorbereitung der Bonusklausur am 25.01.2014

1. Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x_1 \quad\quad\; - \;\; x_3 &= \;\; 2 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= -26 \\ 5x_1 + x_2 - \;\; x_3 &= \;\; 6. \end{aligned}$$

a) Stelle die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix auf.

b) Berechne die Lösung des linearen Gleichungssystems mit dem Gauß-Verfahren.

c) Berechne die Lösung des linearen Gleichungssystems mit dem Gauß-Jordan-Verfahren.

2. Löse das folgende Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren:

$$\begin{aligned} x_1 + -2x_2 + \;\; x_3 + -x_4 &= \;\; 5 \\ -2x_1 + \;\; 5x_2 + \quad\quad + \; 4x_4 &= -2 \\ x_1 + \quad x_2 + 3x_3 + \;\; x_4 &= 13. \end{aligned}$$

Falls es unendlich viele Lösungen gibt, so ist die allgemeine Lösung in Parameterform anzugeben! Gib außerdem eine geometrische Beschreibung der gefundenen Lösungsmenge an (Gerade, Ebene, etc.).

3. a) Löse das Gleichungssystem aus Aufgabe 1 mithilfe der inversen Koeffizientenmatrix.

b) Unter welchen Voraussetzungen kann das Verfahren aus a) zum Lösen eines linearen Gleichungssystems eingesetzt werden? Welche Vorteile bringt es gegenüber dem Gauß-(Jordan)-Verfahren?

4. Entscheide für die folgenden Vektoren, ob sie linear abhängig oder linear unabhängig sind. Gib jeweils eine Begründung.

a) $v_1 = (1,3,5)$, $v_2 = (2,-1,-1)$ und $v_3 = (-2,15,23)$.

b) $v_1 = (1,0,-1,2)$, $v_2 = (0,2,3,1)$, $v_3 = (4,3,-2,0)$ und $v_4 = (2,-1,2,-3)$.

c) $v_1 = (1,5,7,-6)$, $v_2 = (-9,-1,0,3)$, $v_3 = (8,4,-4,-2)$, $v_4 = (1,3,3,7)$ und $v_5 = (42,-23,0,1)$.

5. Es seien $a, b \in \mathbb{R}^3$ zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren. Begründe, weshalb für die Koordinatenform des Skalarprodukts gilt:

$$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \perp b.$$

Hinweis: Begründe die Aussage zunächst für die folgende Definition des Skalarprodukts: $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos\varphi$. Zeige anschließend mit dem Kosinussatz, dass sich aus dieser Darstellung die Koordinatenform des Skalarprodukts herleiten lässt.

6. Gegeben seien die folgenden Punkte des $\mathbb{R}^2$:

$$A = (1,1), \quad B = (3,7) \quad \text{und} \quad C = (-1,-5).$$

a) Gib die Gerade, die durch die Punkte A, B und C verläuft, in Koordinatenform an.

b) Gib einen Vektor n an, der orthogonal zu der von dir gefundenen Geraden ist.

7. Gegeben seien die folgenden Punkte:

$$A = (1, 0, 3), \quad B = (-1, 5, 3) \quad \text{und} \quad C = (3, 5, 0).$$

a) Gib die durch A, B und C beschriebene Ebene $\mathcal{E}$ in Parameterform an.

b) Bestimme einen Vektor n, der senkrecht auf der Ebene $\mathcal{E}$ steht. Zeige, dass n tatsächlich orthogonal zu $\mathcal{E}$ ist.

c) Überprüfe, ob die Punkte $P_1 = (1, 10, 0)$ und $P_2 = (-3, 7, 4)$ in der Ebene $\mathcal{E}$ liegen.

d) Gib die von dir gefundene Ebene $\mathcal{E}$ in Koordinatenform an.

e) Bestimme, falls vorhanden, die Schnittpunkte der Ebene $\mathcal{E}$ mit den Koordinatenachsen. Falls die Ebene eine der Koordinatenachsen nicht schneidet, so ist nachzuweisen, dass in der Tat kein Schnittpunkt existiert.

8. Gegeben seien die Vektoren $a = (1, 0, 2, -1)$, $b = (3, 1, 0, -2)$, $c = (-1, -2, x, 0)$ und $d = (1, y, 2, z)$ des $\mathbb{R}^4$.

a) Entscheide, ob die Vektoren a und b senkrecht zueinander sind.

b) Bestimme den von den Vektoren a und b eingeschlossenen Winkel φ.

c) Bestimme den Wert x, so dass $a \perp c$ gilt.

d) Bestimme die Werte x, y und z, so dass $c \perp d$ gilt.

e) Bestimme die Länge des Vektors b.

f) Bestimme x derart, dass der von a und c eingeschlossene Winkel $\frac{\pi}{4}$ beträgt.