Mathematik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

Steven Köhler

Wintersemester 2013/14

Aufgaben zur Vorbereitung der Abschlussklausur am 15.02.2014

1. a) Zeige, dass bis auf Isomorphie nur eine einzige Gruppe der Ordnung 5 existiert.

b) Es seien a, b, c, d Elemente einer Gruppe $\mathcal{G}$. Vereinfache den folgenden Ausdruck:

$$a\big(bdc^{-1}\big)^{-1}bd^{-1}a\big(b^{-1}d^{-1}a\big)^{-1}$$

c) Es sei $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\} = \{1, 2, \ldots, 10\}$ mit Multiplikation modulo 11. Die Untergruppe $\mathcal{H}$ sei durch $\mathcal{H} = \langle 3 \rangle$ gegeben. Man gebe die Elemente von $\mathcal{H}$ an und bestimme die Linksnebenklassen von $\mathcal{H}$.

2. $\mathcal{G} = E(\mathbb{Z}_{42})$ sei die Einheitengruppe des Rings $\mathbb{Z}_{42}$.

a) Gib die Elemente von $\mathcal{G}$ an.

b) Ist $\mathcal{G}$ zyklisch? Gib eine kurze Begründung.

3. Der Graph G sei ein vollständiger Graph mit 7 Knoten, aus dem 2 nichtadjazente Kanten entfernt wurden. Der Graph H entsteht, indem man aus einem vollständigen Graphen mit 15 Knoten einen zu G isomorphen Teilgraphen entfernt. Wie viele derartige Graphen H gibt es?

4. Gegeben seien die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 2, 3), \quad v_2 = (-1, 4, -2), \quad v_3 = (-2, 8, -4) \quad \text{und} \quad v_4 = (-3, 18, -5).$$

a) Bestimme eine Basis von $\operatorname{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

b) Gib die Dimension von $\operatorname{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ an.

c) Um welchen Raum handelt es sich bei $\operatorname{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$?

5. Es sei $U = \Big\{\big(x_1, x_2, 0\big) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\Big\}$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Zeige, dass es sich bei den Vektoren $b_1 = (1, 1, 0)$ und $b_2 = (-1, 2, 0)$ um eine Basis von U handelt.

6. Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Berechne die Determinante der Matrix A

(i) durch Entwicklung nach der zweiten Spalte;

(ii) durch Entwicklung nach der dritten Zeile;

(iii) mithilfe der Regel von Sarrus;

(iv) durch Überführen der Matrix A in eine obere Dreiecksmatrix.

b) Welche Aussage über die Invertierbarkeit der Matrix A ist aufgrund ihrer Determinante möglich?

c) Wie lautet die Determinante der inversen Matrix A^{-1}?

7. Entscheide für die folgenden Mengen $U_1, \ldots, U_5$, ob es sich um einen Unterraum des $\mathbb{R}^4$ handelt:

a) $U_1 = \Big\{\big(x_1, x_2, x_3, x_4\big) \mid x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 0\Big\}$;

b) $U_2 = \Big\{\big(x_1, x_2, x_3, x_4\big) \mid x_1 + 2x_2 - x_4 = 2\Big\}$;

c) $U_3 = \Big\{\big(x_1, x_2, x_3, x_4\big) \mid 2x_1 + x_2 - 5x_4 \neq x_3\Big\}$;

d) $U_4 = \Big\{\big(x_1, x_2, x_3, x_4\big) \mid x_4 = x_1 + x_2 - 2x_3\Big\}$;

e) $U_5 = \Big\{\big(x_1, x_2, x_3, x_4\big) \mid x_1 = x_3^2\Big\}$.

8. a) Es sei $V = \mathbb{R}^3$. Gib eine Menge $U \subseteq V$ an, die bezüglich der Vektoraddition abgeschlossen ist, bezüglich der skalaren Multiplikation jedoch *nicht* abgeschlossen ist.

b) Es sei $V = \mathbb{R}^3$. Gib eine Menge $U \subseteq V$ an, die bezüglich der skalaren Multiplikation abgeschlossen ist, bezüglich der Vektoraddition jedoch *nicht* abgeschlossen ist.

9. Beweise mit vollständiger Induktion, dass für die Fibonacci-Zahlen der folgende Zusammenhang gilt:

$$f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}.$$

10. Entscheide, ob die folgenden Abbildungen injektiv und/oder surjektiv sind. Gib jeweils eine (kurze) Begründung.

a) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}: \quad f(n) = \left\lfloor \dfrac{n+3}{2} \right\rfloor$

b) $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}: \quad u(a, b) = \big(ba, 5a + 1\big)$

11. Gegeben sei eine Matrix A mit $\det(A) = 7$. Die Matrix B entsteht aus A durch Ausführung der folgenden Transformationen: Zunächst wird die Matrix A transponiert, anschließend wird die erste mit der dritten Zeile vertauscht sowie die erste Spalte mit 2 multipliziert. Darauffolgendes Addieren der zweiten zur dritten Zeile ergibt die gesuchte Matrix B. Wie lautet die Determinante der Matrix B^{-1}?

12. Gegeben seien die Vektoren z_1, z_2, z_3 und z_4 des $\mathbb{R}^4$, die die Zeilen einer 4×4 Matrix A bilden. Es gelte $\dim\big(Z(A)\big) = 2$. Wahr oder falsch? (Mit kurzer Begründung!)

a) Das Gleichungssystem $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung.

b) Es gilt $\dim\big(N(A^T)\big) = 2$.

c) Eine Aussage über $\det(A)$ ist nur dann möglich, wenn A vollständig bekannt ist.

d) Die inverse Matrix A^{-1} existiert nicht.

e) Die Spaltenvektoren $s_1, \ldots, s_4$ der Matrix A sind linear abhängig.

13. Es seien $A = \big\{1, 2, 3, 4\big\}$ und $B = \big\{a, b, c, d, e, f\big\}$ zwei Mengen.

a) Wie viele binäre Relationen R_a über der Menge A gibt es?

b) Wie viele ternäre Relationen R_b über A, B, A gibt es?

c) Wie viele der Relationen aus a) sind reflexiv?

d) Wie viele der Relationen aus a) sind symmetrisch?

14. Wahr oder falsch?

a) Es existieren bijektive Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b) Es existiert keine injektive Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$.

c) Es existiert eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

d) Jeder Graph, der nur Knoten geraden Grades besitzt, hat einen Hamiltonkreis.

e) Es existiert ein Graph mit 5 Knoten, in dem keine zwei Knoten denselben Grad besitzen.

f) Jede symmetrische Relation R besitzt eine gerade Anzahl von Elementen, d.h. $|R| = 2n$ für $n \in \mathbb{N}$.

g) Das Inverse von 2703 in $\mathbb{Z}_{3012}$ ist 147.

h) Es gibt symmetrische Ordnungsrelationen.

i) Es ist stets möglich, in $\operatorname{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ vier linear unabhängige Vektoren zu finden.

j) Das Kreuzprodukt $a \times b$ liefert stets einen Vektor c, für den $a \perp c$ sowie $b \perp c$ gilt.