

# Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 07.12.2013

Teil 1

# Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

# Abbildungen

# Definition I

---

Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  stellt eine Abbildungsvorschrift dar, die jedem Element der Menge  $A$  ein Element der Menge  $B$  zuordnet.

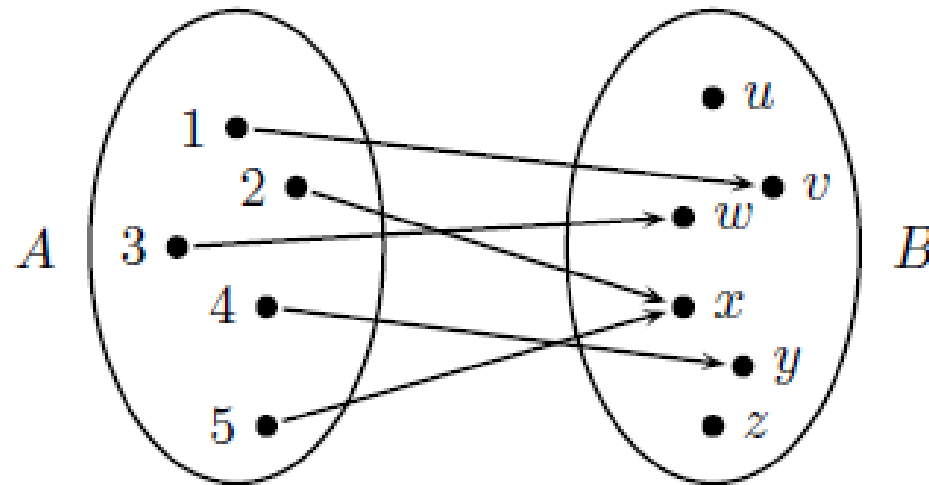
Eine Funktion kann formal wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ a &\mapsto f(a). \end{aligned}$$

# Definition II

---

Bildlich lässt sich eine Abbildung so darstellen:



## Definition III

---

### Bezeichnungen:

- $A$ : Definitionsbereich, Urbildmenge
- $B$ : Bildmenge, Bildbereich
- $A \rightarrow B$ : Signatur
- $a \mapsto f(a)$ : Funktionsvorschrift, Abbildungsvorschrift
- Bild, Wertebereich:  $W_f := f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ .  
Nicht alle Elemente der Bildmenge müssen ein Urbild haben.  
Es gilt  $f(A) \subseteq B$ .

## Definition IV

---

Beispiel:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Definitions- und Wertebereich dieser Funktion sehen wie folgt aus:

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R}\}; \\ W_f &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}. \end{aligned}$$

Für dieses Beispiel gilt also  $W_f \subset \mathbb{R}$ .

# Eigenschaften von Abbildungen I

---

Eine Abbildung heißt:

- *injektiv*, falls für alle  $x, y \in A$  gilt: Aus  $x \neq y$  folgt immer  $f(x) \neq f(y)$ ;
- *surjektiv*, falls es zu jedem  $b \in B$  mindestens ein  $a \in A$  gibt, für das  $f(a) = b$  gilt;
- *bijektiv*, falls sie injektiv und surjektiv ist.



# Eigenschaften von Abbildungen II

---

## Beispiele

- Es sei  $A = \{1, 2, 3\}$  und  $B = \{1, 2, 3\}$ .  $f : A \rightarrow B$  sei definiert durch  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 1$  und  $f(3) = 2$ .
- Es sei  $A = \{1, 2, 3\}$  und  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ .  $f : A \rightarrow B$  sei definiert durch  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 3$  und  $f(3) = 4$ .
- Es sei  $A = \{1, 2, 3\}$  und  $B = \{4, 5\}$ .  $f : A \rightarrow B$  sei definiert durch  $f(1) = 4$ ,  $f(2) = 5$  und  $f(3) = 4$ .
- Es sei  $A = \{1, 2, 3\}$  und  $B = \{3, 4, 5\}$ .  $f : A \rightarrow B$  sei definiert durch  $f(1) = 4$ ,  $f(2) = 5$  und  $f(3) = 3$ .

## Eigenschaften von Abbildungen III

---

Es sei  $f : A \rightarrow B$  eine Abbildung mit der *endlichen* Urbildmenge  $A$  und der *endlichen* Bildmenge  $B$ . Es gilt:

- Ist  $|A| > |B|$ , so kann  $f$  nicht injektiv sein;
- Ist  $|A| < |B|$ , so kann  $f$  nicht surjektiv sein.

**Wichtig: Dies gilt nur für endliche Mengen  $A$  und  $B$ .**

# Umkehrfunktion

---

Ist  $f : A \rightarrow B$  eine bijektive Funktion, dann bezeichnet man mit  $f^{-1} : B \rightarrow A$  die zugehörige Umkehrfunktion.

Der Funktionswert  $f^{-1}(y)$  ist definiert als das (eindeutig bestimmte)  $x \in A$ , für das  $f(x) = y$  gilt.

# Nachweis der Injektivität I

---

Der Nachweis der Injektivität erfolgt immer nach demselben einfachen Schema:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ \downarrow \\ x &= y. \end{aligned}$$

Ist  $f(x) = f(y)$  nur genau dann wahr, wenn  $x = y$  gilt, so ist die Funktion injektiv. Andernfalls ist sie nicht injektiv.

# Nachweis der Injektivität II

---

## Aufgabe

Entscheide, ob die folgende Funktion injektiv ist.

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(x) = 3x + 1$$

## Nachweis der Injektivität III

---

### Lösung

$$\begin{aligned}f(x) &= f(y) \\3x + 1 &= 3y + 1 \\3x &= 3y \\x &= y\end{aligned}$$

Aus  $f(x) = f(y)$  folgt nur die Lösung  $x = y$ . Dies bedeutet, dass keine zwei verschiedenen Elemente  $x$  und  $y$  auf denselben Wert abgebildet werden. Die Funktion ist also injektiv.

# Nachweis der Injektivität IV

---

## Aufgabe

Entscheide, ob die folgende Funktion injektiv ist.

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$f(a, b) = (a + b, a^2)$$

# Nachweis der Injektivität $V$

---

## Lösung

$$\begin{aligned} f(a, b) &= f(c, d) \\ (a + b, a^2) &= (c + d, c^2) \end{aligned}$$

Zwei Tupel sind genau dann gleich, wenn sie in ihren Komponenten übereinstimmen. Es muss gelten:

$$\begin{aligned} a + b &= c + d \\ a^2 &= c^2. \end{aligned}$$



## Nachweis der Injektivität VI

---

Aus der zweiten Gleichung folgt  $a = \pm c$ .

Einsetzen in die erste Gleichung und Umstellen nach  $b$  ergibt zwei mögliche Lösungen:

$$(I) \quad \begin{aligned} a &= c \\ b &= d \end{aligned}$$

$$(II) \quad \begin{aligned} a &= -c \\ b &= 2c + d \end{aligned}$$

Da es mehr als eine Lösung gibt, folgt also insbesondere, dass die Abbildung nicht injektiv sein kann.

## Nachweis der Injektivität VII

---

### Alternative Lösung

Der Nachweis, dass die Funktion nicht injektiv ist, hätte auch durch Angabe eines Gegenbeispiels erfolgen können:

$$f(1, 2) = (3, 1) = f(-1, 4).$$

Es gibt also für mindestens ein Element der Bildmenge mehrere Urbilder, im Widerspruch zur Injektivitätsbedingung.

# Nachweis der Injektivität VIII

---

## Aufgabe

Entscheide, ob die folgenden Funktionen injektiv sind.

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$
$$f(x) = (x + 2)^2$$

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$
$$g(x) = (x + 2)^2$$

$$h : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^3$$
$$h(a, b) = \left( ab, (a + 1)b, a(b^2 + 1) \right)$$

## Nachweis der Injektivität IX

---

Abschließend noch zwei Bemerkungen zur Injektivität:

- Falls die Bildmenge ein Tupel ist, ist keine Aussage über die Injektivität der Abbildung möglich, wenn die Injektivität lediglich für einzelne Komponenten gezeigt wurde.

$$f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$$
$$f(a, b) = \left( 3a + 2, (b - 1)^2 \right)$$

- Obwohl für keine der Komponenten Injektivität gilt, kann die gesamte Abbildung dennoch injektiv sein.

$$f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$$
$$f(a, b) = \left( a + b, a - b \right)$$

# Nachweis der Surjektivität I

---

Der Nachweis der Surjektivität ist im Allgemeinen deutlich schwieriger als der Nachweis der Injektivität.

Für jedes Element  $b$  der Bildmenge muss gezeigt werden, dass es mindestens ein Element  $a$  der Urbildmenge gibt, für das  $f(a) = b$  gilt.

Es gibt leider kein allgemeingültiges Verfahren, dies zu bewerkstelligen. Eine Möglichkeit ist es jedoch, die Umkehrfunktion zu bestimmen, falls diese existiert.

# Nachweis der Surjektivität II

---

## Aufgabe

Entscheide, ob die folgende Funktion surjektiv ist.

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(x) = 3x + 1$$

## Nachweis der Surjektivität III

---

### Lösung

Es gilt

$$y = f(x) = 3x + 1$$

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, stellen wir die Gleichung nach  $x$  um.

$$\begin{aligned} 3x &= y - 1 \\ x &= \frac{y - 1}{3} \end{aligned}$$

Dies sieht wie die Umkehrfunktion aus, ABER im Allgemeinen gilt  $\frac{y - 1}{3} \notin \mathbb{Z}$ . Beispielsweise hat  $y = 2$  kein zugehöriges  $x \in \mathbb{Z}$ . Die Funktion ist also nicht surjektiv.

# Nachweis der Surjektivität IV

---

## Aufgabe

Entscheide, ob die folgende Funktion surjektiv ist.

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(x) = x + 7$$



# Nachweis der Surjektivität $V$

---

## Lösung

Es gilt

$$y = f(x) = x + 7.$$

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, stellen wir die Gleichung nach  $x$  um:

$$x = y - 7.$$

Ist  $y \in \mathbb{Z}$ , so ist auch  $y - 7 \in \mathbb{Z}$ . Es bleibt zu prüfen, ob  $y - 7$  tatsächlich ein Urbild für  $y$  ist. Einsetzen in  $f$  ergibt

$$\begin{aligned} f(y - 7) &= y - 7 + 7 \\ &= y. \end{aligned}$$

Die Funktion  $f$  ist also surjektiv.

# Nachweis der Surjektivität VI

---

## Aufgabe

Entscheide, ob die folgenden Funktionen surjektiv sind.

$$f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$$
$$f(a, b) = a + b$$

$$g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$
$$g(x) = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$$

$$h : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^3$$
$$h(a, b) = (2a + 3b, a^2, (b-1)^2 a)$$

## Nachweis der Surjektivität VII

---

Abschließend noch zwei Bemerkungen zur Surjektivität:

- Ist eine Komponente einer Abbildung nicht surjektiv, so ist es auch die gesamte Abbildung nicht.

$$h : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^3$$
$$h(a, b) = \left( 2a + 3b, a^2, (b - 1)^2 a \right)$$

- Ist jede Komponente einer Abbildung surjektiv, so muss dies dennoch nicht für die gesamte Abbildung gelten.

$$f(a) = \left( a, a + 1 \right)$$

# Verkettung von Funktionen I

---

Es sei  $h : A \rightarrow C$  eine Komposition (Verkettung) der Funktionen  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$ .

$$h = g \circ f$$
$$h(x) = g(f(x))$$

Statt Komposition kann man auch Nacheinanderausführung sagen.  $g \circ f$  bedeutet also,  $g$  wird nach  $f$  ausgeführt.

# Verkettung von Funktionen II

---

Es gelten die folgenden Eigenschaften:

- Sind sowohl  $f$  als auch  $g$  injektiv, so ist auch  $g \circ f$  injektiv.
- Sind sowohl  $f$  als auch  $g$  surjektiv, so ist auch  $g \circ f$  surjektiv.

# Aufgabe 1

---

Entscheide für die folgenden Abbildungen, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Gib in jedem Fall eine (kurze) Begründung.

a)  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = (n - 2)^2$

b)  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, g(n) = 42n - 23$

c)  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, h(n) = ((n - 3)^2, n^2)$

d)  $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, u(a, b) = (ba, 5a + 1)$

e)  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, v(n, m) = 7n - m$

f)  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, f(x, y) = (xy^3, xy^3 - 2y - 9, (y^2 - 5)x)$

# Vollständige Induktion

# Vollständige Induktion I

---

Vollständige Induktion als Beweismethode wird bei Problemen der folgenden Art angewandt: Für jede natürliche Zahl  $n$  sei  $A(n)$  eine Aussage. Es soll bewiesen werden, dass  $A(n)$  für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt, d.h., es soll die Gültigkeit der unendlich vielen Aussagen  $A(1)$ ,  $A(2)$ ,  $A(3)$  ... nachgewiesen werden.



# Vollständige Induktion II

---

Um eine Aussage  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  zu beweisen, genügt es, Folgendes zu zeigen:

(I) Induktionsanfang

$A(1)$  ist richtig.

(II) Induktionsschritt

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt: Falls  $A(n)$  richtig ist, ist auch  $A(n + 1)$  richtig.

# Vollständige Induktion III

---

Behauptung:

Die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen (d.h.  $1 + 2 + \dots + n$ )  
ist gleich  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

# Vollständige Induktion IV

---

Beweis:

Mit vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass  $A(n)$  nicht nur für bestimmte  $n \in \mathbb{N}$ , sondern für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

(I) Induktionsanfang

$A(1)$  ist richtig, da  $1 = \frac{1 \cdot (1 + 1)}{2}$  gilt.

# Vollständige Induktion V

---

## (II) Induktionsschritt

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  eine beliebig gewählte natürliche Zahl; wir setzen voraus, dass  $A(n)$  für dieses  $n$  richtig ist, d.h., es gelte (für dieses  $n$ ):

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (\star)$$

Wir haben zu zeigen, dass unter dieser Voraussetzung auch  $A(n+1)$  richtig ist, d.h., wir müssen Folgendes nachweisen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

# Vollständige Induktion VI

Dies ergibt sich durch die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^n i + (n+1) \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
 &\stackrel{\text{Zusammenfassen}}{=} \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
 &\stackrel{(n+1) \text{ ausklammern}}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
 &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}
 \end{aligned}$$

Damit sind (I) und (II) gezeigt; nach dem Induktionsprinzip gilt  $A(n)$  also für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

## Aufgabe 2

---

Beweise durch vollständige Induktion!

a) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $8 \mid (3^{2n} + 7)$ .

b) Für alle  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  gilt:  $\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ .

c) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$ .

d) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 3$  gilt:  $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$ .

e) Für alle  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  gilt:  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$ .