

# Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 07.12.2013  
Lösungen der Aufgaben (Teil1)

**Steven Köhler**

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

## Aufgabe 1a

---

- $f(n)$  ist nicht injektiv, da beispielsweise gilt:

$$f(1) = 1 = f(3).$$

- $f(n)$  ist nicht surjektiv, da beispielsweise kein Urbild für  $f(n) = 2$  existiert.
- $f(n)$  ist nicht bijektiv.

## Aufgabe 1b

---

- $g(n)$  ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned}g(n) &= g(m) \\42n - 23 &= 42m - 23 \\42n &= 42m \\n &= m\end{aligned}$$

- $g(n)$  ist nicht surjektiv, da beispielsweise  $g(n) = 10$  kein Urbild besitzt.
- $g(n)$  ist nicht bijektiv.

## Aufgabe 1c

---

- $h(n)$  ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned}h(n) &= h(m) \\ ((n-3)^2, n^2) &= ((m-3)^2, m^2)\end{aligned}$$

Es folgt

$$(n-3)^2 = (m-3)^2 \quad (1)$$

$$n^2 - 6n + 9 = m^2 - 6m + 9$$

$$n^2 = m^2 \quad (2)$$

Subtraktion von (1) und (2) ergibt:

$$-6n + 9 = -6m + 9$$

$$n = m$$

- $h(n)$  ist nicht surjektiv, da beispielsweise  $h(n) = (\star, 2)$  kein Urbild besitzt.
- $h(n)$  ist nicht bijektiv.

## Aufgabe 1d

---

- $u(a, b)$  ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned}u(a, b) &= u(x, y) \\ (ba, 5a + 1) &= (yx, 5x + 1)\end{aligned}$$

Es folgt

$$ba = yx \quad (1)$$

$$5a + 1 = 5x + 1 \quad (2)$$

Aus (2) folgt direkt  $a = x$ . Einsetzen in (1) und Division durch  $a$  ( $a \neq 0$  wegen  $a \in \mathbb{N}$ ) ergibt  $b = y$ ;

- $u(a, b)$  ist nicht surjektiv, da beispielsweise  $u(a, b) = (\star, 2)$  kein Urbild besitzt.
- $u(a, b)$  ist nicht bijektiv.

## Aufgabe 1e

---

- $v(n, m)$  ist nicht injektiv, da beispielsweise gilt:

$$v(1, 0) = 7 = v(2, 7).$$

- $v(n, m)$  ist surjektiv, da beispielsweise  $(0, -y)$  ein Urbild für  $v(n, m) = y$  ist:

$$v(0, -y) = 7 \cdot 0 - (-y) = y.$$

- $v(n, m)$  ist nicht bijektiv.

## Aufgabe 1f

---

- $f(x, y)$  ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) \\ (xy^3, xy^3 - 2y - 9, (y^2 - 5)x) &= (ab^3, ab^3 - 2b - 9, (b^2 - 2)a) \end{aligned}$$

Es folgt

$$xy^3 = ab^3 \quad (1)$$

$$xy^2 + 5y - 1 = ab^2 + 5b - 1 \quad (2)$$

$$(y^2 - 2)x = (b^2 - 2)a \quad (3)$$

Subtraktion von (1) und (2) und anschließendes Umformen ergibt  $y = b$ . Einsetzen in (3) liefert  $x = a$ .

- $f(x, y)$  ist nicht surjektiv, da bspw.  $f(x, y) = (0, 0, 0)$  kein Urbild besitzt.
- $f(x, y)$  ist nicht bijektiv.

## Aufgabe 2a

---

(I) Induktionsanfang:

Für  $n = 1$  gilt  $3^{2 \cdot 1} + 7 = 16$  und  $8 \mid 16 (= 2 \cdot 8)$ . ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h.  $8 \mid (3^{2n} + 7)$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned}3^{2(n+1)} + 7 &= 3^{2n+2} + 7 \\&= 3^2 \cdot 3^{2n} + 7 \\&= 8 \cdot 3^{2n} + 3^{2n} + 7 \\&= 8 \cdot 3^{2n} + (3^{2n} + 7)\end{aligned}$$

Dieser Term ist offensichtlich durch 8 teilbar. Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. □

## Aufgabe 2b

---

(I) Induktionsanfang:

Für  $n = 0$  gilt  $\sum_{i=0}^0 q^i = q^0 = 1 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$ . ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  eine fest gewählte Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h.  $\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} q^i &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \sum_{i=0}^n q^i + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\&= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  gilt. □

## Aufgabe 2c I

---

(I) Induktionsanfang:

Für  $n = 1$  gilt  $\sum_{i=1}^1 \frac{1}{(2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{3}$  sowie  $\frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$ . ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h.  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$ .

## Aufgabe 2c II

---

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} \\
 &= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\
 &= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
 &= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}
 \end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. □

## Aufgabe 2d

---

(I) Induktionsanfang:

Für  $n = 3$  gilt  $3 \cdot \sqrt{3} > 5 > 3 + \sqrt{3}$ . ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  eine fest gewählte natürliche Zahl mit  $n \geq 3$ , für die die Behauptung gilt, d.h.  $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned}(n+1) \cdot \sqrt{n+1} &= n \cdot \sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} \\ &> n \cdot \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\ &> n + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\ &> (n+1) + \sqrt{n+1}\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. □

## Aufgabe 2e I

---

(I) Induktionsanfang:

Für  $n = 1$  gilt  $\sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} = 2$  sowie  $2^1 = 2$ . ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h.  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} &= \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} + \binom{n+1}{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0} + \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} + \binom{n+1}{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0} + \sum_{i=1}^n \left( \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) + \binom{n+1}{n+1}\end{aligned}$$

## Aufgabe 2e II

---

$$\begin{aligned} &= 1 + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i-1} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} + 1 \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} + 1 \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \\ &= 2 \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \\ &= 2 \cdot 2^n \\ &= 2^{n+1} \end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.  $\square$