Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 07.12.2013

Lösungen der Aufgaben (Teil1)

Steven Köhler
mathe@stevenkoehler.de
mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1a

- $f(n)$ ist nicht injektiv, da beispielsweise gilt:

$$f(1) = 1 = f(3).$$

- $f(n)$ ist nicht surjektiv, da beispielsweise kein Urbild für $f(n) = 2$ existiert.
- $f(n)$ ist nicht bijektiv.

Aufgabe 1b

- $g(n)$ ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned} g(n) &= g(m) \\ 42n - 23 &= 42m - 23 \\ 42n &= 42m \\ n &= m \end{aligned}$$

- $g(n)$ ist nicht surjektiv, da beispielsweise $g(n) = 10$ kein Urbild besitzt.
- $g(n)$ ist nicht bijektiv.

Aufgabe 1c

- $h(n)$ ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned} h(n) &= h(m) \\ ((n-3)^2, n^2) &= ((m-3)^2, m^2) \end{aligned}$$

  Es folgt

$$\begin{aligned} (n-3)^2 &= (m-3)^2 \qquad (1) \\ n^2 - 6n + 9 &= m^2 - 6m + 9 \\ n^2 &= m^2 \qquad (2) \end{aligned}$$

  Subtraktion von (1) und (2) ergibt:

$$\begin{aligned} -6n + 9 &= -6m + 9 \\ n &= m \end{aligned}$$

- $h(n)$ ist nicht surjektiv, da beispielsweise $h(n) = (\star, 2)$ kein Urbild besitzt.

- $h(n)$ ist nicht bijektiv.

Aufgabe 1d

- $u(a, b)$ ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned} u(a,b) &= u(x,y) \\ \big(ba, 5a+1\big) &= \big(yx, 5x+1\big) \end{aligned}$$

  Es folgt

$$\begin{aligned} ba &= yx & (1) \\ 5a+1 &= 5x+1 & (2) \end{aligned}$$

  Aus (2) folgt direkt $a = x$. Einsetzen in (1) und Division durch a ($a \neq 0$ wegen $a \in \mathbb{N}$) ergibt $b = y$;

- $u(a, b)$ ist nicht surjektiv, da beispielsweise $u(a, b) = (\star, 2)$ kein Urbild besitzt.

- $u(a, b)$ ist nicht bijektiv.

Aufgabe 1e

- $v(n, m)$ ist nicht injektiv, da beispielsweise gilt:

$$v(1, 0) = 7 = v(2, 7).$$

- $v(n, m)$ ist surjektiv, da beispielsweise $(0, -y)$ ein Urbild für $v(n, m) = y$ ist:

$$v(0, -y) = 7 \cdot 0 - (-y) = y.$$

- $v(n, m)$ ist nicht bijektiv.

Aufgabe 1f

- $f(x,y)$ ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) \\ \left(xy^3, xy^3 - 2y - 9, (y^2-5)x\right) &= \left(ab^3, ab^3 - 2b - 9, (b^2-2)a\right) \end{aligned}$$

  Es folgt

$$\begin{aligned} xy^3 &= ab^3 && (1) \\ xy^2 + 5y - 1 &= ab^2 + 5b - 1 && (2) \\ \left(y^2-2\right)x &= \left(b^2-2\right)a && (3) \end{aligned}$$

  Subtraktion von (1) und (2) und anschließendes Umformen ergibt $y = b$. Einsetzen in (3) liefert $x = a$.

- $f(x,y)$ ist nicht surjektiv, da bspw. $f(x,y) = (0,0,0)$ kein Urbild besitzt.

- $f(x,y)$ ist nicht bijektiv.

Aufgabe 2a

(I) Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt $3^{2\cdot 1} + 7 = 16$ und $8 \mid 16$ $(= 2 \cdot 8)$. ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h. $8 \mid \left(3^{2n} + 7\right)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)} + 7 &= 3^{2n+2} + 7 \\ &= 3^2 \cdot 3^{2n} + 7 \\ &= 8 \cdot 3^{2n} + 3^{2n} + 7 \\ &= 8 \cdot 3^{2n} + \left(3^{2n} + 7\right) \end{aligned}$$

Dieser Term ist offensichtlich durch 8 teilbar. Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\square$

Aufgabe 2b

<u>(I) Induktionsanfang:</u>

Für $n = 0$ gilt $\sum\limits_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$. ✓

<u>(II) Induktionsschritt:</u>

Es sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ eine fest gewählte Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h. $\sum\limits_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad &= \quad \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\
&= \quad \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\
&= \quad \frac{1-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}
\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt. $\square$

Aufgabe 2c I

(I) Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt $\sum\limits_{i=1}^{1} \frac{1}{(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)} = \frac{1}{3}$ sowie $\frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$. ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h. $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

Aufgabe 2c II

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} \\
&= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}
\end{aligned}
$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\square$

Aufgabe 2d

<u>(I) Induktionsanfang:</u>

Für $n = 3$ gilt $3 \cdot \sqrt{3} > 5 > 3 + \sqrt{3}$. ✓

<u>(II) Induktionsschritt:</u>

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl mit $n \geq 3$, für die die Behauptung gilt, d.h. $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
(n+1) \cdot \sqrt{n+1} &= n \cdot \sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} \\
&> n \cdot \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\
&> n + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\
&> (n+1) + \sqrt{n+1}
\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\square$

Aufgabe 2e I

(I) Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt $\sum\limits_{i=0}^{1} \binom{1}{i} = 2$ sowie $2^1 = 2$. ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h. $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} + \binom{n+1}{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} + \binom{n+1}{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} + \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) + \binom{n+1}{n+1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2e II

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} + 1 \\
&= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} + 1 \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \\
&= 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \\
&= 2 \cdot 2^n \\
&= 2^{n+1}
\end{aligned}
$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\square$