Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 07.12.2013

Teil 2

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Mengen

Aufgabe 3

Es sei $M = \{1,2\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Welche sind falsch?

(i) $1 \in \mathcal{P}(M)$

(ii) $2 \subseteq \mathcal{P}(M)$

(iii) $\{1,2\} \in \mathcal{P}(M)$

(iv) $\{1,2\} \subseteq \mathcal{P}(M)$

(v) $\{1,\{1\}\} \in \mathcal{P}(M)$

(vi) $\{\{1\},\{3\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$

(vii) $\{\{1\},\{2\}\} \subseteq \mathcal{P}(M)$

(viii) $\{(1,2)\} \subseteq \mathcal{P}(M)$

(ix) $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))| = 2 + \sum_{i=1}^{15} \binom{16}{i}$

(x) $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))| = 2 + \sum_{i=1}^{3} \binom{4}{i}$

Teilbarkeit

Aufgabe 4

Wahr oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung.

a) $31 \equiv 65 \pmod{17}$

b) $42 \equiv 23 \pmod{11}$

c) $202 \equiv 101 \pmod{47}$

d) $-147 \equiv 312 \pmod{3}$

e) $29 \equiv 59 \pmod{23}$

Aufgabe 5

Beweise oder widerlege.

a) Die Zahlen 224 und 613 sind teilerfremd.

b) Die Zahlen 247 und 312 sind teilerfremd.

Aufgabe 5b

Mit dem Euklidischen Algorithmus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
312 &= 1 \cdot 247 + 65 \\
247 &= 3 \cdot 65 + 52 \\
65 &= 1 \cdot 52 + 13 \\
52 &= 4 \cdot 13 + 0
\end{aligned}$$

Der größte gemeinsame Teiler von 312 und 247 ist folglich 13. Das bedeutet, dass die beiden Zahlen nicht teilerfremd sind.

Kombinatorik

Aufgabe 6

Es seien $A = \{a_1, \ldots, a_7\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_9\}$ mit $|A| = 7$ und $|B| = 9$.

a) Wie viele Abbildungen $A \to B$ gibt es?

b) Wie viele dieser Abbildungen sind injektiv?

c) Wie viele dieser Abbildungen sind surjektiv?

d) Wie viele dieser Abbildungen sind injektiv, wenn zusätzlich $f(a_1) \neq f(a_2)$ gelten soll?

e) Wie viele dieser Abbildungen sind injektiv, wenn zusätzlich $f(a_1) \neq f(a_2)$ sowie $f(a_1) = f(a_3)$ gelten soll?

f) Wie viele Abbildungen gibt es, für die $f(a_1) \neq f(a_2)$ sowie $f(a_1) \neq f(a_3)$ gilt?

Binomialkoeffizienten

Es gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad \text{(explizite Formel)}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad \text{(Rekursionsformel)}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{(Symmetrie)}$$

Binomischer Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Aufgabe 7 a-c

a) In einer Urne befinden sich 9 unterscheidbare Kugeln. Es wird 5 mal gezogen. Wie viele mögliche Ergebnisse gibt es, wenn

   (i) die Reihenfolge der gezogenen Kugeln berücksichtigt wird?

   (ii) die Reihenfolge der gezogenen Kugeln egal ist?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, im Lotto exakt 3 richtige Gewinnzahlen anzukreuzen?

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, im Lotto mindestens 5 richtige Gewinnzahlen anzukreuzen?

Aufgabe 7 d-g

d) Wie viele sinnvolle oder sinnlose Wörter lassen sich aus den Buchstaben des Wortes *SEETERRASSE* bilden?

e) Für $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2k$: Wie viele Möglichkeiten gibt es, insgesamt n Bonbons auf k Kinder derart zu verteilen, dass jedes Kind mindestens zwei Bonbons erhält?

f) Welchen Koeffizienten besitzt $a^6 b^3$ in $\left(a+b\right)^9$?

g) Welchen Koeffizienten besitzt $x^2 z^5 w^5$ in $\left(x+y+z+w\right)^{12}$?

Aufgabe 8

Zeige mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{i}{1} = \binom{n+1}{n-1}$$

Relationen

Eigenschaften von Relationen I

Es sei R eine Relation über einer Menge A. Die Relation R ist

- *symmetrisch*, falls gilt:

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R.$$

- *nicht symmetrisch*, falls gilt:

$$\exists a, b \in A : (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R.$$

- *antisymmetrisch*, falls gilt:

$$\forall a, b \in A, a \neq b : (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R.$$

- *nicht antisymmetrisch*, falls gilt:

$$\exists a, b \in A : (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R.$$

Eigenschaften von Relationen II

Es sei R eine Relation über einer Menge A. Die Relation R ist

- *reflexiv*, falls gilt:

$$\forall a \in A : (a, a) \in R.$$

- *nicht reflexiv*, falls gilt:

$$\exists a \in A : (a, a) \notin R.$$

- *irreflexiv*, falls gilt:

$$\forall a \in A : (a, a) \notin R.$$

- *nicht irreflexiv*, falls gilt:

$$\exists a \in A : (a, a) \in R.$$

Eigenschaften von Relationen III

Es sei R eine Relation über einer Menge A. Die Relation R ist

- *transitiv*, falls gilt:

$$\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R.$$

- *intransitiv*, falls gilt:

$$\exists a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \notin R.$$

- *antitransitiv*, falls gilt:

$$\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \notin R.$$

Eigenschaften von Relationen IV

Es sei R eine Relation über einer Menge A. Man nennt R eine

- *Äquivalenzrelation*, falls gilt:

$$R \text{ ist symmetrisch, reflexiv und transitiv.}$$

- *Ordnungsrelation*, falls gilt:

$$R \text{ ist antisymmetrisch, reflexiv und transitiv.}$$

Aufgabe 9

Es sei R die folgende auf der Menge $A = \{a, b, c, d\}$ definierte Relation:

$$R = \Big\{(a,a),(a,b),(b,b),(c,a),(d,a),(b,a),(a,d),(d,d)\Big\}.$$

a) Entscheide, welche der folgenden Eigenschaften auf die Relation zutreffen. Gib jeweils eine kurze Begründung.

   (i) symmetrisch

   (ii) antisymmetrisch

   (iii) reflexiv

   (iv) irreflexiv

   (v) transitiv

b) Ist R eine Ordnungs- oder eine Äquivalenzrelation?

Aufgabe 10

Es sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Gib eine Relation R_a über der Menge A an, die reflexiv, aber nicht transitiv ist.

b) Gib eine Relation R_b über der Menge A an, die symmetrisch, transitiv und nicht irreflexiv ist.

c) Gib eine Relation R_c über der Menge A an, die irreflexiv und weder symmetrisch noch antisymmetrisch ist. Dabei soll $|R_c| \geq 5$ gelten.

d) Gib eine Relation R_d über der Menge A an, die weder Ordnungs- noch Äquivalenzrelation ist. Dabei soll $|R_d| \leq 3$ gelten.

Aufgabe 11

Es seien $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ zwei Mengen.

a) Wie viele binäre Relationen R_a über der Menge A gibt es?

b) Wie viele ternäre Relationen R_b über A, B, A gibt es?

c) Wie viele der Relationen aus a) sind reflexiv?

d) Wie viele der Relationen aus a) sind symmetrisch?

Matrizen

Definition I

Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung (Tabelle) von Elementen, mit denen man in bestimmter Weise rechnen kann.

Matrizen sind ein Schlüsselkonzept der linearen Algebra und tauchen in vielen Gebieten der Mathematik auf. Matrizen stellen Zusammenhänge, in denen Linearkombinationen eine Rolle spielen, übersichtlich dar und erleichtern damit Rechen- und Gedankenvorgänge. Sie werden insbesondere dazu benutzt, lineare Abbildungen darzustellen und lineare Gleichungssysteme zu beschreiben.

Definition II

Matrizen werden dargestellt durch eine tabellarische Auflistung der Werte, die durch ein großes Klammerpaar umgeben ist. Die Form der Klammern ist dabei nicht fest vorgegeben, typisch sind aber runde oder eckige Klammern.

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Addition von Matrizen

Ebenso wie Vektoren werden Matrizen elementweise addiert und subtrahiert.

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Subtraktion von Matrizen

Ebenso wie Vektoren werden Matrizen elementweise addiert und subtrahiert.

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} & a_{33} - b_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Skalare Multiplikation

Eine Matrix kann mit einen konstanten Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert werden. Den Wert λ nennt man ein Skalar.

$$\lambda A = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{bmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen I

Neben der skalaren Multiplikation gibt es noch eine weitere Multiplikation für Matrizen. Dabei werden 2 Matrizen miteinander mutlipliziert. Die folgende Formel zeigt dies exemplarisch für zwei 3×3 - Matrizen:

$$\begin{aligned}
&A \cdot B \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Multiplikation von Matrizen II

Die Einträge der Ergebnismatrix C sind offenbar die Skalarprodukte der Zeilenvektoren der Matrix A mit den Spaltenvektoren der Matrix B.

Daraus lässt sich leicht eine Aussage über eine essentielle Voraussetzung der Matrizenmultiplikation treffen.

Damit man zwei Matrizen multiplizieren kann, müssen die Anzahl der Spalten der ersten Matrix und die Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix übereinstimmen.

Multiplikation von Matrizen III

Gegeben seien sei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B = \mathbb{R}^{n \times p}$. Das Produkt C der beiden Matrizen A und B ist dann eine $m \times p$ - Matrix und lässt sich allgemein durch die folgende Formel darstellen:

$$\begin{aligned} C &= A \cdot B \\ &= \left[a_{ij}\right] \cdot \left[b_{ij}\right] \\ &= \left[c_{ij}\right] \text{ mit } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \end{aligned}$$

Falksches Schema I

Das Falksche Schema (1951 von Sigurd Falk vorgeschlagen) ist eine einfache Methode, Matrizenmultiplikation übersichtlicher darzustellen.

Dazu werden die Matrizen A und B sowie deren Produkt C in eine bestimmte tabellarische Form gebracht, die vor allem eine optische Hilfe bietet.

Falksches Schema II

Gegeben seien die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Darstellung der Matrizenmultiplikation mit dem Falkschen Schema:

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} (= B) \\
\hline
(A =) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} (= C)
\end{array}
$$

Die Werte für c_{ij} berechnen sich wie zuvor durch $c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}$.

Aufgabe 12

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Gib an, welche dieser Matrizen miteinander multipliziert werden können (Das Berechnen der Produkte ist nicht Teil dieser Aufgabe.)

b) Berechne, falls existent, die folgenden Produkte: AB, BA^T, CD und DC.

c) Welche Voraussetzungen müssen zwei Matrizen erfüllen, damit sie multipliziert werden können?

Viel Erfolg bei der Bonusklausur ☺