Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 07.12.2013
Lösungen der Aufgaben (Teil 2)

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 3

Es sei $M = \{1, 2\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(M) &= \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\Big\} \\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(M)) &= \Big\{A \mid A \subseteq \mathcal{P}(M)\Big\}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar:

(i)	falsch	(vi)	falsch
(ii)	falsch	(vii)	wahr
(iii)	wahr	(viii)	falsch
(iv)	falsch	(ix)	falsch
(v)	falsch	(x)	wahr

Aufgabe 4

a) Wahr, da $65 - 31 = 34$ und $17 \mid 34$ gilt.

b) Falsch, da $42 - 23 = 19$ und $11 \nmid 19$ gilt.

c) Falsch, da $202 - 101 = 101$ und $47 \nmid 101$ gilt.

d) Wahr, da $312 - (-147) = 459$ und $3 \mid 459$ gilt.

e) Falsch, da $59 - 29 = 30$ und $23 \nmid 30$ gilt.

Aufgabe 5a

Mit dem Euklidischen Algorithmus ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
613 &= 2 \cdot 224 + 165 \\
224 &= 1 \cdot 165 + 59 \\
165 &= 3 \cdot 59 + 47 \\
59 &= 1 \cdot 47 + 12 \\
47 &= 3 \cdot 12 + 11 \\
12 &= 1 \cdot 11 + 1 \\
11 &= 11 \cdot 1 + 0
\end{aligned}
$$

Der größte gemeinsame Teiler von 613 und 224 ist folglich 1. Das bedeutet, dass die beiden Zahlen keine gemeinsamen Teiler ≥ 1 besitzen.

Aufgabe 5b

Mit dem Euklidischen Algorithmus ergibt sich:

$$\begin{aligned} 312 &= 1 \cdot 247 + 65 \\ 247 &= 3 \cdot 65 + 52 \\ 65 &= 1 \cdot 52 + 13 \\ 52 &= 4 \cdot 13 + 0 \end{aligned}$$

Der größte gemeinsame Teiler von 312 und 247 ist folglich 13. Das bedeutet, dass die beiden Zahlen nicht teilerfremd sind.

Aufgabe 6

Es seien A und B Mengen mit $|A| = 7$ und $|B| = 9$. Betrachtet werden Abbildungen $A \to B$.

a) Es gibt insgesamt $9^7 = 4.782.969$ Abbildungen.

b) Es gibt insgesamt $9^{\underline{7}} = 181.440$ injektive Abbildungen.

c) Es gibt keine surjektiven Abbildungen, da $|B| > |A|$ gilt.

d) Wie in b) existieren 181.440 Abbildungen. $f(a_1) \neq f(a_3)$ ist durch die Injektivität bereits implizit gegeben.

e) Es gibt keine injektiven Abbildungen mit $f(a_1) = f(a_3)$.

f) Es gibt insgesamt $9^5 \cdot 8^2 = 3.779.136$ derartige Abbildungen.

Aufgabe 7 a-c

a) (i)
- mit Zurücklegen: $9^5 = 59.049$ Möglichkeiten;
- ohne Zurücklegen: $9^{\underline{5}} = 15.120$ Möglichkeiten

(ii)
- mit Zurücklegen: $\binom{5+9-1}{5} = 1.287$ Möglichkeiten;
- ohne Zurücklegen: $\binom{9}{5} = 126$ Möglichkeiten

b) Es gibt insgesamt $\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = 246.820$ Möglichkeiten, exakt 3 richtige Gewinnzahlen anzukreuzen.

c) Es gibt insgesamt $\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1} + \binom{6}{6} \cdot \binom{43}{0} = 259$ Möglichkeiten, mindestens 5 richtige Gewinnzahlen anzukreuzen.

Aufgabe 7 d-f

d) Anzahl der möglichen Wörter:

$$\binom{11}{3,4,1,2,1} = \frac{11!}{3!\cdot 4!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!} = 138.600.$$

e) Zunächst erhält jedes Kind 2 Bonbons. Es verbleiben $n-2k$ Bonbons. Daraus resultiert die folgende Anzahl an Möglichkeiten:

$$\binom{k-1+n-2k}{n-2k} = \binom{n-k-1}{n-2k}.$$

f) Der gesuchte Koeffizient lautet $\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$

g) Der gesuchte Koeffizient lautet $\binom{12}{2,5,5} = 16.632$

Aufgabe 8

(I) Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt $\sum_{i=1}^{1} \binom{i}{1} = \binom{1}{1} = 1 = \binom{2}{0} = \binom{1+1}{1-1}$. ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h. $\sum_{i=1}^{n} \binom{i}{1} = \binom{n+1}{n-1}$. Dann folgt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \binom{i}{1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{i}{1} + \binom{n+1}{1} = \binom{n+1}{n-1} + \binom{n+1}{1}$$
$$= \binom{n+1}{n-1} + \binom{n+1}{n} = \binom{n+2}{n}$$

Dieser Term ist offensichtlich durch 8 teilbar. Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\square$

Aufgabe 9

a) (i) falsch
   (ii) falsch
   (iii) falsch
   (iv) falsch
   (v) falsch

b) R ist weder Äquivalenz- noch Ordnungsrelation.

Aufgabe 10

a) $R_a = \left\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (1,2),\ (2,3)\right\}$
- nicht transitiv, da z.B. $(1,3)$ fehlt

b) $R_b = \emptyset$
- triviale Symmetrie, Transitivität

c) $R_c = \left\{(1,2),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,2),\ (1,3)\right\}$
- nicht symmetrisch, da $(3,1)$ fehlt
- nicht antisymmetrisch, da z.B. $(2,3)$ und $(3,2)$ enthalten ist.

d) $R_d = \emptyset$
- nicht reflexiv, folglich weder Äquivalenz- noch Ordnungsrelation

Aufgabe 11

a) Es gibt $2^{|A\times A|} = 2^{16} = 65.536$ binäre Relationen R_a.

b) Es gibt $2^{|A\times B\times A|} = 2^{4\cdot 6\cdot 4} = 2^{96}$ ternäre Relationen R_b.

c) Die Elemente $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ und $(4,4)$ müssen enthalten sein. Die restlichen 12 Elemente können enthalten sein oder nicht enthalten sein. Es existieren folglich $2^{12} = 4.096$ reflexive binäre Relationen über A.

d) Es existieren $2^4 \cdot 2^6 = 2^{10} = 1.024$ symmetrische binäre Relationen über A.

Aufgabe 12

a) Die folgenden Produkte existieren: AA, BA, CD, DB und DC.

b) Es gilt:

$$BA^T = \begin{bmatrix} -2 & -11 & -1 \\ 1 & 11 & -4 \end{bmatrix}, \quad CD = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}, \quad DC = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

AB existiert nicht.

c) Die Anzahl der Spalten der linken Matrix muss mit der Anzahl der Zeilen der rechten Matrix übereinstimmen.