Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der zweiten Bonusklausur am 25.01.2014

Teil 1

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Erweiterter Euklidischer Algorithmus

Zum Bestimmen des *multiplikativen Inversen* von x in $\mathbb{Z}_m$ kann der *erweiterte Euklidische Algorithmus* verwendet werden.

- Bestimmen von $\mathrm{ggT}\,(x, m)$.
- Gilt $\mathrm{ggT}\,(x, m) \neq 1$, so existiert kein multiplikatives Inverses zu x in $\mathbb{Z}_m$.
- Gilt $\mathrm{ggT}\,(x, m) = 1$, so kann das multiplikatives Inverse durch *Rückwärtseinsetzen* bestimmt werden.

Satz von Fermat

Satz von Fermat

Es sei p eine Primzahl und n sei eine natürliche Zahl, für die $p \nmid n$ gilt. Dann folgt:

$$n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Aufgabe 1

Bestimme, falls möglich, das multiplikative Inverse. Gib im Falle der Nicht-Existenz eine (kurze) Begründung, weshalb das Inverse nicht existiert.

a) 23 in $\mathbb{Z}_{149}$

b) 54 in $\mathbb{Z}_{966}$

c) 1336 in $\mathbb{Z}_{1337}$

Aufgabe 2

a) Bestimme den Rest von 5^{964} bei Division durch 23.

b) Bestimme den Rest von 4^{153} bei Division durch 42.

Aufgabe 3 a-d

Eine Permutation $\pi \in S_9$ sei wie folgt definiert:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 7 & 4 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

a) Gib π in Zyklenschreibweise an.

b) Gib π als Nacheinanderausführung von Transpositionen an.

c) Ist π eine gerade oder eine ungerade Permutation?

d) Bestimme $\operatorname{sign} \pi$.

Aufgabe 3 e-f

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 7 & 4 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

e) Entscheide, ob durch die folgende Permutation $\rho \in S_9$ dieselbe Permutation wie durch π beschrieben wird:

$$\rho = (1,2)(2,3)(1,3)(4,2)(9,8)(4,6)(1,2)(1,6)(2,1)(2,5)(8,3)(3,9)(9,8).$$

f) Entscheide, ob durch π und φ dieselbe Permutation beschrieben ist:

$$\pi = (1,2)(3,4)(1,3)(2,4)(1,4)(2,3)$$
$$\varphi = (1,3)(2,4)(1,2)(2,4)(1,3)(2,3).$$

Eulersche Linie

Definition

G sei ein zusammenhängender (Multi-)Graph. Einen Kantenzug in G nennt man eine Eulersche Linie, falls er geschlossen ist und sämtliche Kanten von G durchläuft.

notwendige & hinreichende Bedinung

Für jeden zusammenhängenden (Multi-)Graphen G gilt: G hat genau dann eine Eulersche Linie, wenn der Grad jedes Knotens gerade ist.

Hamiltonkreis

Definition

G sei ein Graph und C sei ein Kreis in G. Man nennt C einen *Hamiltonschen Kreis* (oder auch *Hamilton-Kreis*), wenn C sämtliche Knoten von G enthält.

notwendige & hinreichende Bedinungen

Hat ein Graph $G = (V, E)$ einen Hamiltonkreis, so gilt für alle $A \subseteq V$: $c(G - A) \leq |A|$. (notwendig)

Gilt $d(v) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ für alle $v \in V$, so besitzt der Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ einen Hamiltonkreis. (Satz von Dirac, hinreichend)

Gilt $d(v) + d(u) \geq n$ für alle nichtadjazenten Knoten $u, v \in V$, so besitzt der Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ einen Hamiltonkreis. (Satz von Ore, hinreichend)

Aufgabe 4

G sei ein ungerichteter Graph mit 123 Knoten. In G besitzen 16 Knoten den Grad 1, 10 Knoten besitzen Grad 3, 55 Knoten besitzen Grad 5; die restlichen Knoten besitzen Grad 7. Wie viele Kanten besitzt der Graph G?

Aufgabe 5

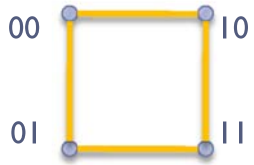
Beweise durch vollständige Induktion, dass der Hyperwürfel Q_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ einen Hamiltonkreis besitzt.

Aufgabe 5 – Lösung I

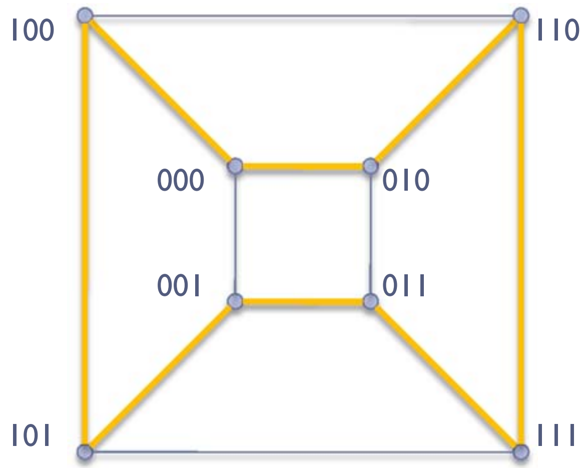
Induktionsanfang

Die Hyperwürfel Q_2 und Q_3 besitzen Hamiltonkreise.

Hyperwürfel Q_2



Hyperwürfel Q_3



Aufgabe 5 – Lösung II

Induktionsannahme

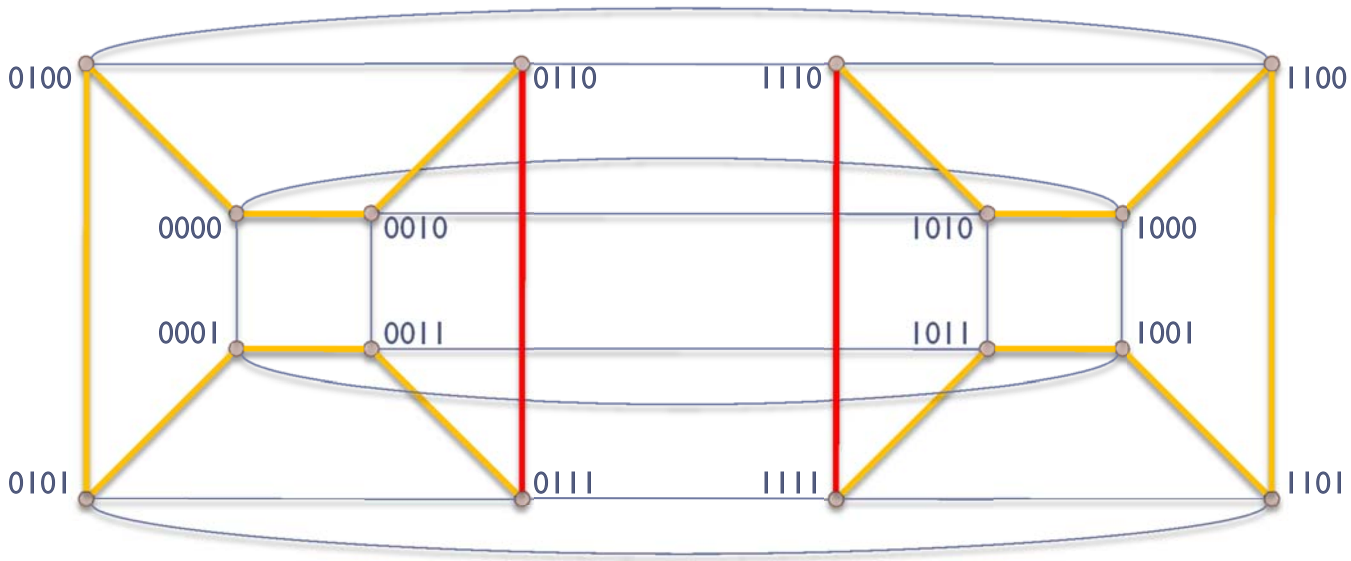
Für ein fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$ besitzt der Hyperwürfel Q_n einen Hamiltonkreis.

Induktionsschritt

Der Hyperwürfel Q_{n+1} entsteht aus Q_n, indem man Q_n verdoppelt (und die Kopie spiegelt) und die entsprechenden Verbindungskanten hinzufügt.

Aufgabe 5 – Lösung III

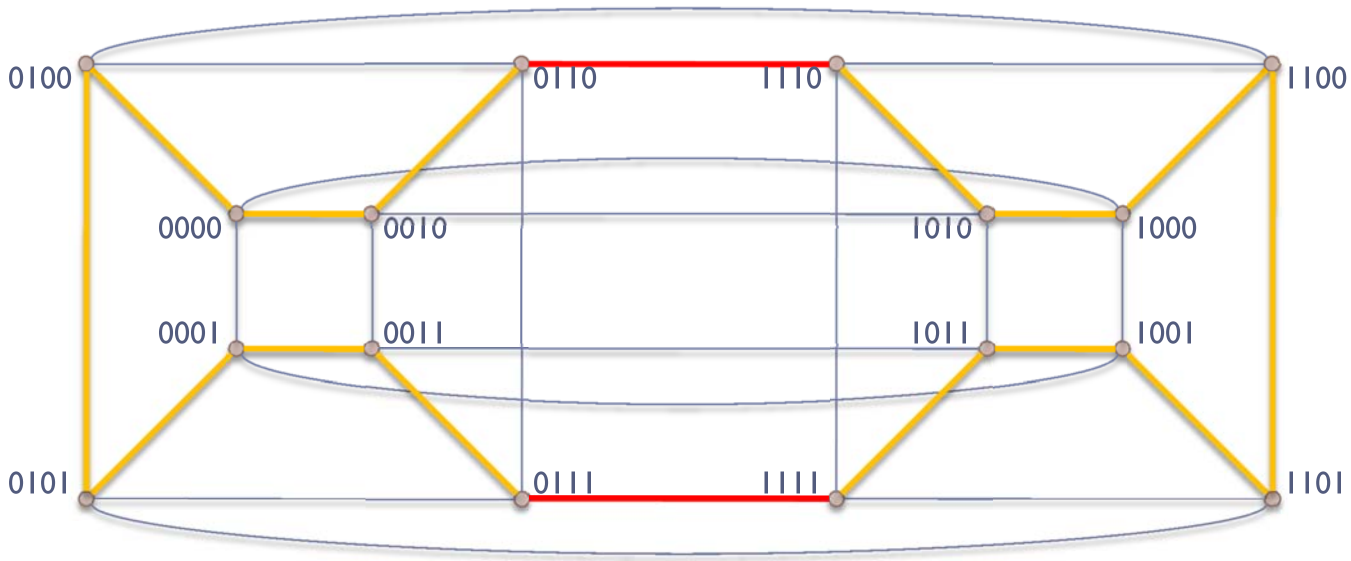
Demonstration am Beispiel von Q_4:



Die orangenen (bzw. roten) Kanten sind die Hamiltonkreise der beiden enthaltenen Hyperwürfel Q_3. Die beiden roten Kanten werden aus den Hamiltonkreisen "entfernt", die orangenen Kantenzüge werden neu verbunden.

Aufgabe 5 – Lösung IV

Es entsteht der Hamiltonkreis des Q_4:



Auf diese Weise lässt sich der Hamiltonkreis für jeden Hyperwürfel Q_{n+1} aus den (nach der Induktionsannahme exitierenden) Hamiltonkreisen der beiden Hyperwürfel Q_n konstruieren. $\square$

Aufgabe 6

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Der Graph H_n sei wie folgt definiert: Die Knotenmenge von H_n sei die Menge aller n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in \{0, 1, 2\}$ (für $i = 1, \ldots, n$). Zwei Knoten seien genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie sich an genau 2 Stellen unterscheiden.

a) Wie viele Knoten besitzt der Graph H_n?

b) Wie viele Kanten besitzt der Graph H_n?

Aufgabe 7

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Der ungerichtete Graph H bestehe aus zwei Zusammenhangskomponenten H_1 und H_2. Der Teilgraph H_1 sei ein vollständiger Graph mit n Knoten, der Teilgraph H_2 sei ein Baum mit insgesamt $2n$ Knoten. Der Graph G entsteht aus H dadurch, dass man weitere Kanten wie folgt zu H hinzufügt: Man verbindet jeden Knoten von H_1 mit jedem Knoten von H_2 durch eine Kante.

a) Wie viele Kanten besitzt der Graph G?

b) Besitzt der Graph G einen Hamiltonkreis? Falls ja, so ist eine Konstruktionsvorschrift für einen Hamiltonkreis anzugeben. Falls nein, wieso nicht?

c) Begründe, weshalb der Graph G im Allgemeinen keine Eulersche Linie besitzt.

Aufgabe 8

Wahr oder falsch? Gib jeweils eine (kurze) Begründung.

(i) Jeder vollständige Graph besitzt einen Hamiltonkreis.

(ii) In einem Graphen ist die Summe aller Knotengrade stets gerade.

(iii) Ein ungerichteter Graph besitzt genau dann eine Eulersche Linie, wenn jeder Knoten einen geraden Grad besitzt.

(iv) Es existiert kein ungerichteter Graph mit n Knoten und n^2 Kanten.

(v) Das "Haus des Nikolaus" besitzt eine Eulersche Linie.

(vi) Es sei $G = (V, E)$. Gilt $c(G - A) < |A|$ für alle Teilmengen $A \subseteq V$, so besitzt der Graph G einen Hamiltonkreis.

Aufgabe 9

Es seien die folgenden beiden Polynome gegeben:

$$\begin{aligned} a(x) &= 4x^3 + 2x + 1 \\ b(x) &= 5x^2 + x + 3. \end{aligned}$$

a) Bestimme $a(x) + b(x)$ sowie $a(x) \cdot b(x)$.

b) Bestimme $a(x) - b(x)$ und $a(x) : b(x)$ unter der Bedingung, dass sämtliche Koeffizienten aus $\mathbb{Z}_7$ stammen.

Aufgabe 10

Es seien die folgenden beiden Polynome gegeben:

$$\begin{aligned} a(x) &= x^9 + 2x^7 - 3x^6 + 2x^4 - x^3 + 5x^2 + x - 23 \\ b(x) &= x^{10} - 5x^9 + 2x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 - x + 42. \end{aligned}$$

a) Bestimme den Grad des Polynoms $a(x) \cdot b(x)$.

b) Welchen Koeffizienten besitzt x^{13} im Produkt $a(x) \cdot b(x)$?

Aufgabe 11

Wahr oder falsch? Gib jeweils eine (kurze) Begründung.

(i) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=2}^{n+1} a_{j-1}$

(ii) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n+1} a_{k+1}$

(iii) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot n^k = \sum_{k=0}^{n} k \cdot n^k$

(iv) $\sum_{k=4}^{10} b_k = \sum_{k=4}^{10} b_{10-k}$