Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 25.01.2014
Lösungen der Aufgaben (Teil 1)

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1a

a) Bestimmen von $\operatorname{ggT}(149, 23)$ mit dem Euklidischen Algorithmus:

$$\begin{aligned} 149 &= 6 \cdot 23 + 11 \\ 23 &= 2 \cdot 11 + 1 \\ 11 &= 11 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Es folgt $\operatorname{ggT}(149, 23) = 1$, folglich existiert das Inverse.

Rückwärtseinsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} 1 &= 23 - 2 \cdot 11 \\ &= 23 - 2 \cdot (149 - 6 \cdot 23) \\ &= -2 \cdot 149 + 13 \cdot 23 \end{aligned}$$

Aufgabe 1a-c

Es folgt:

$$1 \equiv -2 \cdot 149 + 13 \cdot 23 \equiv 13 \cdot 23 \pmod{149}$$

Es ist $x = 13$ das gesuchte Inverse von 23 in $\mathbb{Z}_{149}$.

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} 54 &= 2 \cdot 27 \\ 966 &= 2 \cdot 483. \end{aligned}$$

54 und 966 sind nicht teilerfremd. Folglich existiert kein multiplikatives Inverses für 54 in $\mathbb{Z}_{966}$.

c) Es gilt, dass $m-1$ in $\mathbb{Z}_m$ stets zu sich selbst invers ist. Folglich ist 1336 in $\mathbb{Z}_{1337}$ zu sich selbst invers.

Aufgabe 2

a) Nach dem Satz von Fermat gilt $5^{22} \equiv 1 \pmod{23}$. Es folgt

$$5^{964} \equiv \left(5^{22}\right)^{43} \cdot 5^{18} \equiv 1^{43} \cdot 5^{18} \equiv 6 \pmod{23}.$$

b) Berechnen der notwendigen Potenzen mittels Square-and-Multiply-Verfahren:

$$\begin{aligned} 4^1 &\equiv 4 \pmod{42} & 4^{16} &\equiv 4 \pmod{42} \\ 4^2 &\equiv 16 \pmod{42} & 4^{32} &\equiv 16 \pmod{42} \\ 4^4 &\equiv 4 \pmod{42} & 4^{64} &\equiv 4 \pmod{42} \\ 4^8 &\equiv 16 \pmod{42} & 4^{128} &\equiv 16 \pmod{42} \end{aligned}$$

Es folgt

$$4^{153} \equiv 4^{128} \cdot 4^{16} \cdot 4^8 \cdot 4^1 \equiv 16 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 4 \equiv 22 \pmod{42}.$$

Aufgabe 3a-e

a) $\pi = (1,3,2)(4,5,7,6)(8,9)$.

b) $\pi = (1,2)(1,3)(4,6)(4,7)(4,5)(8,9)$.

c) π besteht aus 6 Transpositionen, ist also gerade.

d) $\operatorname{sign} \pi = +1$.

e) π ist eine gerade, ρ ist eine ungerade Permutation mit 13 Transpositionen. Diese können nicht identisch sein, da gerade Permutationen nur durch andere gerade Permutationen dargestellt werden können; analog für ungerade Permutationen.

Aufgabe 3f

f) Bei π handelt es sich um die folgende Permutation:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Bei φ handelt es sich um die folgende Permutation:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Permutationen π und φ sind also nicht identisch.

Aufgabe 4

Für jeden Graphen gilt:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|. \qquad (\star)$$

Für den Graphen G gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} d(v) &= 16 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 55 \cdot 5 + 42 \cdot 7 \\ &= 615 \end{aligned}$$

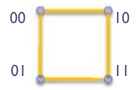
Nach $(\star)$ muss die Summe der Knotengrade stets gerade sein. Bei G handelt es sich folglich nicht um einen gültigen Graphen.

Aufgabe 5 I

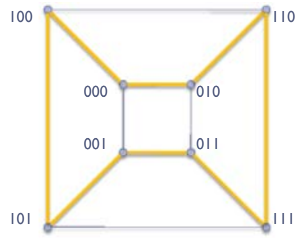
<u>Induktionsanfang</u>

Die Hyperwürfel Q_2 und Q_3 besitzen Hamiltonkreise.

Hyperwürfel Q_2



Hyperwürfel Q_3



Aufgabe 5 II

<u>Induktionsannahme</u>

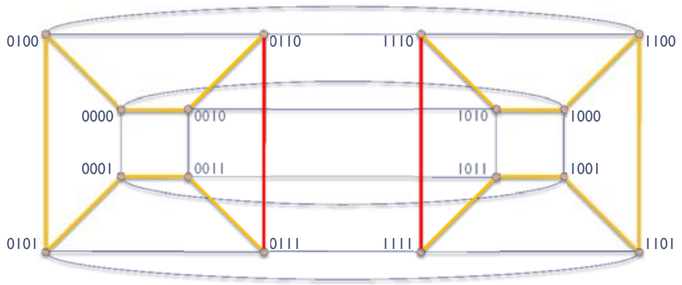
Für ein fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ besitzt der Hyperwürfel Q_n einen Hamiltonkreis.

<u>Induktionsschritt</u>

Der Hyperwürfel Q_{n+1} entsteht aus Q_n, indem man Q_n verdoppelt (und die Kopie spiegelt) und die entsprechenden Verbindungskanten hinzufügt.

Aufgabe 5 III

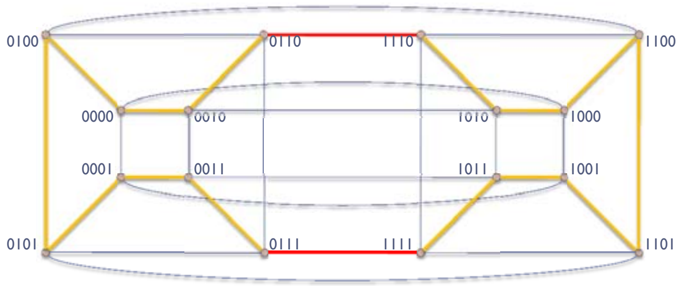
Demonstration am Beispiel des Q_4:



Die orangenen (bzw. roten) Kanten sind die Hamiltonkreise der beiden enthaltenen Hyperwürfel Q_3. Die beiden roten Kanten werden aus den Hamiltonkreisen "entfernt", die orangenen Kantenzüge werden neu verbunden.

Aufgabe 5 IV

Es entsteht der Hamiltonkreis des Q_4:



Auf diese Weise lässt sich der Hamiltonkreis für jeden Hyperwürfel Q_{n+1} aus den (nach der Induktionsannahme exitierenden) Hamiltonkreisen der beiden Hyperwürfel Q_n konstruieren. $\square$

Aufgabe 6

a) Es gibt insgesamt 3^n Möglichkeiten, ein n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ zu erzeugen, wenn $x_i \in \{0, 1, 2\}$ (für $i = 1, \ldots, n$) gelten soll. Folglich besitzt der Graph H_n insgesamt 3^n Knoten.

b) Es gibt $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten, die 2 Stellen auszuwählen, an denen sich zwei verbundene Tupel unterscheiden. Es gibt insgesamt 4 Tupel, die sich nur an den zwei ausgewählten Stellen von einem Tupel unterscheiden. Jeder Knoten ist folglich mit $\binom{n}{2} \cdot 4$ anderen Knoten verbunden. Es existieren folglich

$$3^n \cdot \binom{n}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 3^n \cdot \binom{n}{2}$$

Kanten.

Aufgabe 7

a) H_1 besitzt $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ Kanten. H_2 besitzt $2n - 1$ Kanten. Für die Verbindung von H_1 und H_2 werden $n \cdot 2n = 2n^2$ Kanten benötigt. Als Gesamtanzahl der Kanten von G folgt:

$$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 2n - 1 + 2n^2 = \frac{5}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 1.$$

b) Für $n >= 3$ gilt: Besitzt der Baum z.B. die Form eines Sterns, so existiert kein Hamiltonkreis.

c) Die Knoten von H_1 haben den Grad $3n - 1$; dieser ist ungerade, falls n gerade ist. Es existiert dann keine Eulersche Linie.

Aufgabe 8

(i) Falsch, die Aussage gilt nur für vollständige Graphen mit mindestens 3 Knoten.

(ii) Wahr. Jede Kante erhöht die Summe der Knotengrade um 2.

(iii) Falsch, der Graph muss zusätzlich zusammenhängend sein.

(iv) Wahr, da ein ungerichteter Graph maximal $\binom{n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ Knoten besitzen kann.

(v) Falsch. Es existieren 2 Knoten mit Grad 3.

(vi) Falsch. In der richtigen Bedingung heißt es $\leq$ statt $<$; außerdem ist diese Bedingung zwar notwendig, aber nicht hinreichend.

Aufgabe 9

a) Es ergibt sich

$$\begin{aligned} a(x) + b(x) &= 4x^3 + 5x^2 + 3x + 4 \\ a(x) \cdot b(x) &= 20x^5 + 4x^4 + 22x^3 + 7x^2 + 7x + 3. \end{aligned}$$

b) Es ergibt sich

$$\begin{aligned} a(x) - b(x) &= 4x^3 + 2x^2 + x + 5 \\ a(x) : b(x) &= 5x + 6, \text{ Rest: } 2x + 4. \end{aligned}$$

Aufgabe 10

a) Die höchste in $a(x) \cdot b(x)$ vorkommende Potenz ist $x^9 \cdot x^{10} = x^{19}$; der Grad von $a(x) \cdot b(x)$ ist folglich 19.

b) Berechnen und Aufsummieren aller Terme, die x^{13} ergeben:

$$x^9 \cdot (-4x^4) + 2x^7 \cdot 2x^6 + 2x^4 \cdot (-5x^9) + (-x^3) \cdot x^{10} = -11x^{13}$$

Der gesuchte Koeffizient lautet folglich -11.

Aufgabe 11

a) Wahr. Es werden auf beiden Seiten die Terme $a_1, \ldots, a_n$ aufsummiert.

b) Falsch. Es werden links die Terme $a_1, \ldots, a_n$ und rechts die Terme $a_1, \ldots, a_{n+2}$ aufsummiert.

c) Wahr. Es werden auf beiden Seite $1 \cdot n^1, \ldots, n \cdot n^n$ aufsummiert. Der Term $0 \cdot n^0$ auf der rechten Seite entfällt.

d) Falsch. Es werden links die Terme $b_4, \ldots, b_{10}$ und rechts die Terme $b_0, \ldots, b_6$ aufsummiert.