

Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 25.01.2014
Lösungen der Aufgaben (Teil 1)

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1a

- a) Bestimmen von $\text{ggT}(149, 23)$ mit dem Euklidischen Algorithmus:

$$149 = 6 \cdot 23 + 11$$

$$23 = 2 \cdot 11 + 1$$

$$11 = 11 \cdot 1 + 0$$

Es folgt $\text{ggT}(149, 23) = 1$, folglich existiert das Inverse.

Rückwärtseinsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} 1 &= 23 - 2 \cdot 11 \\ &= 23 - 2 \cdot (149 - 6 \cdot 23) \\ &= -2 \cdot 149 + 13 \cdot 23 \end{aligned}$$

Aufgabe 1a-c

Es folgt:

$$1 \equiv -2 \cdot 149 + 13 \cdot 23 \equiv 13 \cdot 23 \pmod{149}$$

Es ist $x = 13$ das gesuchte Inverse von 23 in \mathbb{Z}_{149} .

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} 54 &= 2 \cdot 27 \\ 966 &= 2 \cdot 483. \end{aligned}$$

54 und 966 sind nicht teilerfremd. Folglich existiert kein multiplikatives Inverses für 54 in \mathbb{Z}_{966} .

c) Es gilt, dass $m - 1$ in \mathbb{Z}_m stets zu sich selbst invers ist. Folglich ist 1336 in \mathbb{Z}_{1337} zu sich selbst invers.

Aufgabe 2

a) Nach dem Satz von Fermat gilt $5^{22} \equiv 1 \pmod{23}$. Es folgt

$$5^{964} \equiv (5^{22})^{43} \cdot 5^{18} \equiv 1^{43} \cdot 5^{18} \equiv 6 \pmod{23}.$$

b) Berechnen der notwendigen Potenzen mittels Square-and-Multiply-Verfahren:

$$4^1 \equiv 4 \pmod{42}$$

$$4^{16} \equiv 4 \pmod{42}$$

$$4^2 \equiv 16 \pmod{42}$$

$$4^{32} \equiv 16 \pmod{42}$$

$$4^4 \equiv 4 \pmod{42}$$

$$4^{64} \equiv 4 \pmod{42}$$

$$4^8 \equiv 16 \pmod{42}$$

$$4^{128} \equiv 16 \pmod{42}$$

Es folgt

$$4^{153} \equiv 4^{128} \cdot 4^{16} \cdot 4^8 \cdot 4^1 \equiv 16 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 4 \equiv 22 \pmod{42}.$$

Aufgabe 3a-e

- a) $\pi = (1, 3, 2)(4, 5, 7, 6)(8, 9)$.
- b) $\pi = (1, 2)(1, 3)(4, 6)(4, 7)(4, 5)(8, 9)$.
- c) π besteht aus 6 Transpositionen, ist also gerade.
- d) $\text{sign } \pi = +1$.
- e) π ist eine gerade, ρ ist eine ungerade Permutation mit 13 Transpositionen. Diese können nicht identisch sein, da gerade Permutationen nur durch andere gerade Permutationen dargestellt werden können; analog für ungerade Permutationen.

Aufgabe 3f

f) Bei π handelt es sich um die folgende Permutation:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Bei φ handelt es sich um die folgende Permutation:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Permutationen π und φ sind also nicht identisch.

Aufgabe 4

Für jeden Graphen gilt:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|. \quad (\star)$$

Für den Graphen G gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} d(v) &= 16 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 55 \cdot 5 + 42 \cdot 7 \\ &= 615 \end{aligned}$$

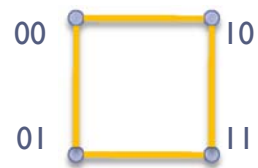
Nach (\star) muss die Summe der Knotengrade stets gerade sein. Bei G handelt es sich folglich nicht um einen gültigen Graphen.

Aufgabe 5 I

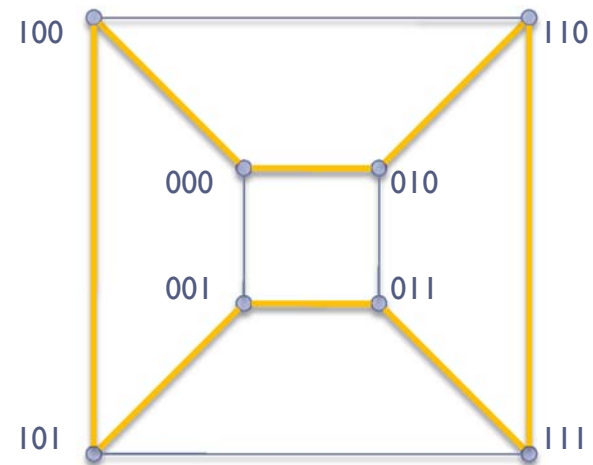
Induktionsanfang

Die Hyperwürfel Q_2 und Q_3 besitzen Hamiltonkreise.

Hyperwürfel Q_2



Hyperwürfel Q_3



Aufgabe 5 II

Induktionsannahme

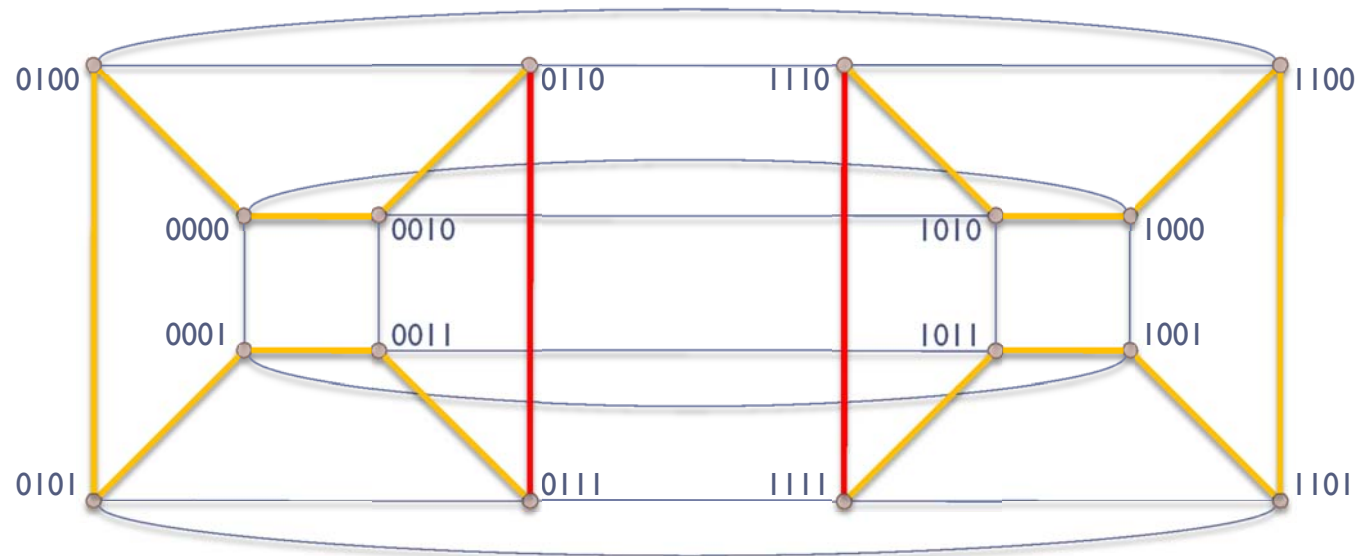
Für ein fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ besitzt der Hyperwürfel Q_n einen Hamiltonkreis.

Induktionsschritt

Der Hyperwürfel Q_{n+1} entsteht aus Q_n , indem man Q_n verdoppelt (und die Kopie spiegelt) und die entsprechenden Verbindungskanten hinzufügt.

Aufgabe 5 III

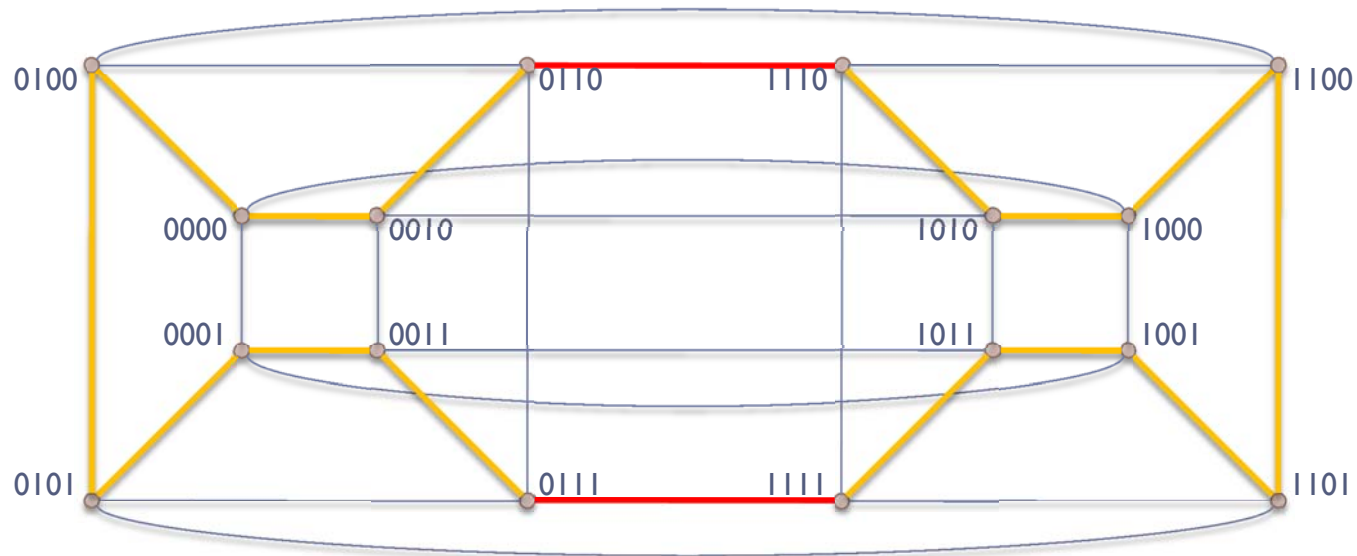
Demonstration am Beispiel des Q_4 :



Die orangenen (bzw. roten) Kanten sind die Hamiltonkreise der beiden enthaltenen Hyperwürfel Q_3 . Die beiden roten Kanten werden aus den Hamiltonkreisen “entfernt”, die orangenen Kantenzüge werden neu verbunden.

Aufgabe 5 IV

Es entsteht der Hamiltonkreis des Q_4 :



Auf diese Weise lässt sich der Hamiltonkreis für jeden Hyperwürfel Q_{n+1} aus den (nach der Induktionsannahme existierenden) Hamiltonkreisen der beiden Hyperwürfel Q_n konstruieren. \square

Aufgabe 6

- a) Es gibt insgesamt 3^n Möglichkeiten, ein n -Tupel (x_1, \dots, x_n) zu erzeugen, wenn $x_i \in \{0, 1, 2\}$ (für $i = 1, \dots, n$) gelten soll. Folglich besitzt der Graph H_n insgesamt 3^n Knoten.
- b) Es gibt $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten, die 2 Stellen auszuwählen, an denen sich zwei verbundene Tupel unterscheiden. Es gibt insgesamt 4 Tupel, die sich nur an den zwei ausgewählten Stellen von einem Tupel unterscheiden. Jeder Knoten ist folglich mit $\binom{n}{2} \cdot 4$ anderen Knoten verbunden. Es existieren folglich

$$3^n \cdot \binom{n}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 3^n \cdot \binom{n}{2}$$

Kanten.

Aufgabe 7

- a) H_1 besitzt $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ Kanten. H_2 besitzt $2n - 1$ Kanten. Für die Verbindung von H_1 und H_2 werden $n \cdot 2n = 2n^2$ Kanten benötigt. Als Gesamtanzahl der Kanten von G folgt:

$$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 2n - 1 + 2n^2 = \frac{5}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 1.$$

- b) Für $n \geq 3$ gilt: Besitzt der Baum z.B. die Form eines Sterns, so existiert kein Hamiltonkreis.
- c) Die Knoten von H_1 haben den Grad $3n - 1$; dieser ist ungerade, falls n gerade ist. Es existiert dann keine Eulersche Linie.

Aufgabe 8

- (i) Falsch, die Aussage gilt nur für vollständige Graphen mit mindestens 3 Knoten.
- (ii) Wahr. Jede Kante erhöht die Summe der Knotengrade um 2.
- (iii) Falsch, der Graph muss zusätzlich zusammenhängend sein.
- (iv) Wahr, da ein ungerichteter Graph maximal $\binom{n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ Knoten besitzen kann.
- (v) Falsch. Es existieren 2 Knoten mit Grad 3.
- (vi) Falsch. In der richtigen Bedingung heißt es \leq statt $<$; außerdem ist diese Bedingung zwar notwendig, aber nicht hinreichend.

Aufgabe 9

a) Es ergibt sich

$$a(x) + b(x) = 4x^3 + 5x^2 + 3x + 4$$

$$a(x) \cdot b(x) = 20x^5 + 4x^4 + 22x^3 + 7x^2 + 7x + 3.$$

b) Es ergibt sich

$$a(x) - b(x) = 4x^3 + 2x^2 + x + 5$$

$$a(x) : b(x) = 5x + 6, \text{ Rest: } 2x + 4.$$

Aufgabe 10

a) Die höchste in $a(x) \cdot b(x)$ vorkommende Potenz ist $x^9 \cdot x^{10} = x^{19}$; der Grad von $a(x) \cdot b(x)$ ist folglich 19.

b) Berechnen und Aufsummieren aller Terme, die x^{13} ergeben:

$$x^9 \cdot (-4x^4) + 2x^7 \cdot 2x^6 + 2x^4 \cdot (-5x^9) + (-x^3) \cdot x^{10} = -11x^{13}$$

Der gesuchte Koeffizient lautet folglich -11.

Aufgabe 11

- a) Wahr. Es werden auf beiden Seiten die Terme a_1, \dots, a_n aufsummiert.
- b) Falsch. Es werden links die Terme a_1, \dots, a_n und rechts die Terme a_1, \dots, a_{n+2} aufsummiert.
- c) Wahr. Es werden auf beiden Seite $1 \cdot n^1, \dots, n \cdot n^n$ aufsummiert. Der Term $0 \cdot n^0$ auf der rechten Seite entfällt.
- d) Falsch. Es werden links die Terme b_4, \dots, b_{10} und rechts die Terme b_0, \dots, b_6 aufsummiert.