Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der zweiten Bonusklausur am 25.01.2014
Teil 2

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x_1 \phantom{{}+x_2} - x_3 &= 2 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= -26 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 &= 6. \end{aligned}$$

a) Stelle die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix auf.

b) Berechne die Lösung des linearen Gleichungssystems mit dem Gauß-Verfahren.

c) Berechne die Lösung des linearen Gleichungssystems mit dem Gauß-Jordan-Verfahren.

Aufgabe 2

Löse das folgende Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren:

$$\begin{aligned} x_1 + -2x_2 + x_3 + -x_4 &= 5 \\ -2x_1 + 5x_2 + + 4x_4 &= -2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 13. \end{aligned}$$

Falls es unendlich viele Lösungen gibt, so ist die allgemeine Lösung in Parameterform anzugeben! Gib außerdem eine geometrische Beschreibung der gefundenen Lösungsmenge an (Gerade, Ebene, etc.).

Aufgabe 3

a) Löse das Gleichungssystem aus Aufgabe 1 mithilfe der inversen Koeffizientenmatrix.

b) Unter welchen Voraussetzungen kann das Verfahren aus a) zum Lösen eines linearen Gleichungssystems eingesetzt werden? Welche Vorteile bringt es gegenüber dem Gauß-(Jordan)-Verfahren?

Aufgabe 4

Entscheide für die folgenden Vektoren, ob sie linear abhängig oder linear unabhängig sind. Gib jeweils eine Begründung.

a) $v_1 = (1, 3, 5)$, $v_2 = (2, -1, -1)$ und $v_3 = (-2, 15, 23)$.

b) $v_1 = (1, 0, -1, 2)$, $v_2 = (0, 2, 3, 1)$, $v_3 = (4, 3, -2, 0)$ und $v_4 = (2, -1, 2, -3)$.

c) $v_1 = (1, 5, 7, -6)$, $v_2 = (-9, -1, 0, 3)$, $v_3 = (8, 4, -4, -2)$, $v_4 = (1, 3, 3, 7)$ und $v_5 = (42, -23, 0, 1)$.

Aufgabe 5

Es seien $a, b \in \mathbb{R}^3$ zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren. Begründe, weshalb für die Koordinatenform des Skalarprodukts gilt:

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \perp b.$$

Hinweis: Begründe die Aussage zunächst für die folgende Definition des Skalarprodukts: $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos\varphi$. Zeige anschließend mit dem Kosinussatz, dass sich aus dieser Darstellung die Koordinatenform des Skalarprodukts herleiten lässt.

Aufgabe 6

Gegeben seien die folgenden Punkte des $\mathbb{R}^2$:

$$A = (1, 1), \quad B = (3, 7) \quad \text{und} \quad C = (-1, -5).$$

a) Gib die Gerade, die durch die Punkte A, B und C verläuft, in Koordinatenform an.

b) Gib einen Vektor n an, der orthogonal zu der von dir gefundenen Geraden ist.

Aufgabe 7 a-b

Gegeben seien die folgenden Punkte:

$$A = (1, 0, 3), \quad B = (-1, 5, 3) \quad \text{und} \quad C = (3, 5, 0).$$

a) Gib die durch A, B und C beschriebene Ebene $\mathcal{E}$ in Parameterform an.

b) Bestimme einen Vektor n, der senkrecht auf der Ebene $\mathcal{E}$ steht. Zeige, dass n tatsächlich orthogonal zu $\mathcal{E}$ ist.

Aufgabe 7 c-e

c) Überprüfe, ob die Punkte $P_1 = (1, 10, 0)$ und $P_2 = (-3, 7, 4)$ in der Ebene $\mathcal{E}$ liegen.

d) Gib die von dir gefundene Ebene $\mathcal{E}$ in Koordinatenform an.

e) Bestimme, falls vorhanden, die Schnittpunkte der Ebene $\mathcal{E}$ mit den Koordinatenachsen. Falls die Ebene eine der Koordinatenachsen nicht schneidet, so ist nachzuweisen, dass in der Tat kein Schnittpunkt existiert.

Aufgabe 8

Gegeben seien die Vektoren $a = (1, 0, 2, -1)$, $b = (3, 1, 0, -2)$, $c = (-1, -2, x, 0)$ und $d = (1, y, 2, z)$ des $\mathbb{R}^4$.

a) Entscheide, ob die Vektoren a und b senkrecht zueinander sind.

b) Bestimme den von den Vektoren a und b eingeschlossenen Winkel φ.

c) Bestimme den Wert x, so dass $a \perp c$ gilt.

d) Bestimme die Werte x, y und z, so dass $c \perp d$ gilt.

e) Bestimme die Länge des Vektors b.

f) Bestimme x derart, dass der von a und c eingeschlossene Winkel $\frac{\pi}{4}$ beträgt.

Viel Erfolg bei der Bonusklausur ☺