

# Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 25.01.2014  
Lösungen der Aufgaben (Teil 2)

**Steven Köhler**

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

## Aufgabe 1 a-b

---

Überführen der erweiterten Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -26 \\ 5 & 1 & -1 & 6 \end{array} \right] & \xrightarrow{Z_1 \cdot \frac{1}{3}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & 1 & -3 & -26 \\ 5 & 1 & -1 & 6 \end{array} \right] & \begin{array}{l} Z_2 + Z_1 \\ Z_3 - 5Z_1 \end{array} \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{3} & -\frac{76}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \end{array} \right] & \xrightarrow{Z_3 - Z_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{3} & -\frac{76}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 28 \end{array} \right] & Z_3 \cdot \frac{1}{4} \\ & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{3} & -\frac{76}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen ergibt  $x_3 = 7$ ,  $x_2 = -2$  und  $x_1 = 3$ .

## Aufgabe 1 c

---

- c) Anwenden des Gauß-Jordan-Verfahrens (beginnend beim letzten Zwischenschritt von 1b):

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{3} & -\frac{76}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} Z_1 + \frac{1}{3}Z_3 \\ Z_2 + \frac{10}{3}Z_3 \end{array}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right]$$

Das Ergebnis kann nun direkt abgelesen werden:  $x_3 = 7$ ,  $x_2 = -2$  und  $x_1 = 3$ .

## Aufgabe 2

---

Erweiterte Koeffizientenmatrix & Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 13 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{Z_2 + 2Z_1 \\ Z_3 - Z_1}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 8 \end{array} \right] & \xrightarrow{Z_3 - 3Z_2} \\ \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -16 \end{array} \right] & \xrightarrow{Z_3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Wahl von  $x_4 = t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) und Rückwärtseinsetzen ergibt:

$$x_1 = 1 + 2t$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 4 - t$$

$$x_4 = t$$

## Aufgabe 2

---

Überführen des Ergebnisses in Parameterform ergibt

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Es handelt sich um eine Gerade im  $\mathbb{R}^4$ .

## Aufgabe 3 I

Bestimmen der inversen Matrix:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{Z_1 \cdot \frac{1}{3}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} Z_2 + Z_1 \\ Z_3 - 5Z_1 \end{array} \\ \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{Z_3 - Z_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{Z_3 \cdot \frac{1}{4}} \\ \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right] & \begin{array}{l} Z_1 + \frac{1}{3}Z_3 \\ Z_2 + \frac{10}{3}Z_3 \end{array} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right] \end{aligned}$$

## Aufgabe 3 II

Die gesuchte inverse Matrix lautet  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ .

Als Lösung des Gleichungssystems ergibt sich:

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -26 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Das Verfahren kann nur eingesetzt werden, wenn das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt. Es ermöglicht eine sehr effiziente Lösung von linearen Gleichungssystemen, die sich lediglich im Lösungsvektor unterscheiden.

## Aufgabe 4

---

- a) Die Vektoren sind linear abhängig; es gilt  $v_3 = 4v_1 - 3v_2$ .
- b) Aufstellen der erweiterten Koeffizientenmatrix der Gleichung  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$  und Überführen in Zeilenstufenform liefert

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Rückwärtseinsetzen ergibt  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$  als einzige Lösung. Die Vektoren sind folglich linear unabhängig.

- c) Die Vektoren  $v_1, \dots, v_5$  sind linear abhängig; 5 Vektoren des  $\mathbb{R}^4$  können niemals linear unabhängig sein.

## Aufgabe 5 I

---

Gegeben seien die beiden Vektoren  $a = (a_1, a_2, a_3)$  und  $b = (b_1, b_2, b_3)$ .  $\varphi$  sei der zwischen  $u$  und  $v$  eingeschlossene Winkel.

Nach dem Kosinussatz gilt

$$|b - a|^2 = |b|^2 + |a|^2 - 2|a||b| \cos \varphi.$$

Umformen ergibt

$$|a||b| \cos \varphi = \frac{1}{2} (|b|^2 + |a|^2 - |b - a|^2).$$

## Aufgabe 5 II

---

Einsetzen der Definition des Skalarprodukts ergibt

$$a \cdot b = \frac{1}{2} (|b|^2 + |a|^2 - |b - a|^2).$$

Mit der bekannten Formel für den Betrag eines Vektors erhalten wir:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \\ &\quad - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2 - (b_3 - a_3)^2) \\ &= \frac{1}{2} (2a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \end{aligned}$$

## Aufgabe 6 a

---

- a) Bestimmen der Geradengleichung  $x_2 = ax_1 + b$  für die Punkte  $A$  und  $B$ :

Der Anstieg  $a$  ergibt sich als:

$$a = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{7 - 1}{3 - 1} = 3.$$

Einsetzen des Punkts  $A$  in  $x_2 = 3x_1 + b$  ergibt:

$$\begin{aligned} 1 &= 3 \cdot 1 + b \\ b &= -2 \end{aligned}$$

Die gesuchte Koordinatenform ist folglich:

$$-3x_1 + x_2 + 2 = 0.$$

## Aufgabe 6 a-b

---

- a) Die Punktprobe für  $A$ ,  $B$  und  $C$  ist erfolgreich, alle 3 Punkte liegen auf der beschriebenen Geraden
- b) Die Einträge eines Normalenvektors können an den Koeffizienten der Koordinatenform abgelesen werden. Es folgt

$$n = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## Aufgabe 7 a

---

Als mögliche Parameterform ergibt sich z.B.

$$\begin{aligned} x &= \overrightarrow{0A} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1-1 \\ 5-0 \\ 3-3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-0 \\ 0-3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

## Aufgabe 7 b

Berechnen des Normalenvektors mit dem Kreuzprodukt:

$$n = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Der Vektor  $n$  ist orthogonal zu den beiden Spannvektoren der Ebene  $\mathcal{E}$  (und damit auch zur Ebene  $\mathcal{E}$  selbst), da die jeweiligen Skalarprodukte 0 ergeben:

$$\begin{pmatrix} -15 \\ 6 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = -15 \cdot (-2) + (-6) \cdot 5 + (-20) \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = -15 \cdot 2 + (-6) \cdot 5 + (-20) \cdot (-3) = 0$$

## Aufgabe 7 c-d

d) Überführen der Ebene in Koordinatenform mithilfe der Normalenform.

$$\begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$-15x_1 - 6x_2 - 20x_3 + 75 = 0$$

- c)
- Es gilt  $-15 \cdot 1 - 6 \cdot 10 - 20 \cdot 0 + 75 = 0$ .  
 $\Rightarrow P_1$  liegt in der Ebene  $\mathcal{E}$ ;
  - Es gilt  $-15 \cdot (-3) - 6 \cdot 7 - 20 \cdot 4 + 75 = -2 \neq 0$ .  
 $\Rightarrow P_2$  liegt nicht in der Ebene  $\mathcal{E}$ .



## Aufgabe 7 e

---

e) Bestimmen der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

- $x_2 = x_3 = 0$ . Hieraus folgt  $x_1 = 5$ .  
Der Schnittpunkt mit der  $x_1$ -Achse ist  $(5, 0, 0)$ .
- $x_1 = x_3 = 0$ . Hieraus folgt  $x_2 = \frac{25}{2}$ .  
Der Schnittpunkt mit der  $x_2$ -Achse ist  $(0, \frac{25}{2}, 0)$ .
- $x_1 = x_2 = 0$ . Hieraus folgt  $x_3 = \frac{15}{4}$ .  
Der Schnittpunkt mit der  $x_3$ -Achse ist  $(0, 0, \frac{15}{4})$ .

## Aufgabe 8 a-c, e

---

a) Es gilt  $a \cdot b = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) = 5$ .  
Folglich sind  $a$  und  $b$  nicht orthogonal.

b)  $\cos(\varphi) = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{5}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{84}} = \frac{5}{2 \cdot \sqrt{21}}$ .  
Es folgt  $\varphi = \arccos\left(\frac{5}{2 \cdot \sqrt{21}}\right) \approx 56,94^\circ$ .

c) Es muss  $a \cdot c = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot x + (-1) \cdot 0 = 0$  gelten.  
Auflösen nach  $x$  ergibt  $x = \frac{1}{2}$ .

e)  $|b| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$

## Aufgabe 8 d

d) Es muss  $c \cdot d = -1 \cdot 1 - 2y + 3x + 0z = 0$  gelten.

Aufschreiben als erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Überführen in Zeilenstufenform ergibt:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

Wählen von Parametern  $y = s$ ,  $z = t$  (für  $s, t \in \mathbb{R}$ ) und Auflösen nach  $x$  ergibt die Lösung:

$$x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}s$$

$$y = s$$

$$z = t$$

## Aufgabe 8 f

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a \cdot c}{|a| \cdot |c|} = \frac{-2 + 2x}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5 + x^2}}$$

Umstellen, Quadrieren und Umstellen ergibt:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{5 + x^2} &= -4 + 4x \\ 12 \cdot (5 + x^2) &= 16x^2 - 32x + 16 \\ 4x^2 - 32x - 44 &= 0 \\ x^2 - 8x - 11 &= 0. \end{aligned}$$

Lösen der quadratischen Gleichung liefert:

$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{27} = 4 \pm 3 \cdot \sqrt{3}.$$

Lediglich  $x_1 = 4 + 3 \cdot \sqrt{3}$  stellt eine gültige Lösung für die ursprüngliche Fragestellung dar.