Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 25.01.2014
Lösungen der Aufgaben (Teil 2)

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1 a-b

Überführen der erweiterten Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -26 \\ 5 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{Z_1 \cdot \frac{1}{3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & 1 & -3 & -26 \\ 5 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[Z_3 - 5Z_1]{Z_2 + Z_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{3} & -\frac{76}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{Z_3 - Z_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{3} & -\frac{76}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 28 \end{array}\right] \xrightarrow{Z_3 \cdot \frac{1}{4}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{3} & -\frac{76}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

Rückwärtseinsetzen ergibt $x_3 = 7$, $x_2 = -2$ und $x_1 = 3$.

Aufgabe 1 c

c) Anwenden des Gauß-Jordan-Verfahrens (beginnend beim letzten Zwischenschritt von 1b):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{3} & -\frac{76}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{Z_1 + \frac{1}{3}Z_3 \\ Z_2 + \frac{10}{3}Z_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

Das Ergebnis kann nun direkt abgelesen werden: $x_3 = 7$, $x_2 = -2$ und $x_1 = 3$.

Aufgabe 2

Erweiterte Koeffizientenmatrix & Zeilenstufenform:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 13 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{Z_2+2Z_1 \\ Z_3-Z_1}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{Z_3-3Z_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -16 \end{array}\right] \xrightarrow{Z_3\cdot(-\frac{1}{4})} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Wahl von $x_4 = t$ $(t \in \mathbb{R})$ und Rückwärtseinsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 2t \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 4 - t \\ x_4 &= t \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Überführen des Ergebnisses in Parameterform ergibt

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Es handelt sich um eine Gerade im $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 3 I

Bestimmen der inversen Matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{Z_1 \cdot \frac{1}{3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ ]{\substack{Z_2 + Z_1 \\ Z_3 - 5Z_1}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{Z_3 - Z_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{Z_3 \cdot \frac{1}{4}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \xrightarrow[\ ]{\substack{Z_1 + \frac{1}{3}Z_3 \\ Z_2 + \frac{10}{3}Z_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Aufgabe 3 II

Die gesuchte inverse Matrix lautet $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

Als Lösung des Gleichungssystems ergibt sich:

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -26 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Das Verfahren kann nur eingesetzt werden, wenn das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt. Es ermöglicht eine sehr effiziente Lösung von linearen Gleichungssystemen, die sich lediglich im Lösungsvektor unterscheiden.

Aufgabe 4

a) Die Vektoren sind linear abhängig; es gilt $v_3 = 4v_1 - 3v_2$.

b) Aufstellen der erweiterten Koeffizientenmatrix der Gleichung $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$ und Überführen in Zeilenstufenform liefert

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Rückwärtseinsetzen ergibt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ als einzige Lösung. Die Vektoren sind folglich linear unabhängig.

c) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_5$ sind linear abhängig; 5 Vektoren des $\mathbb{R}^4$ können niemals linear unabhängig sein.

Aufgabe 5 I

Gegeben seien die beiden Vektoren $a = (a_1, a_2, a_3)$ und $b = (b_1, b_2, b_3)$. φ sei der zwischen u und v eingeschlossene Winkel.

Nach dem Kosinussatz gilt

$$|b - a|^2 = |b|^2 + |a|^2 - 2|a||b| \cos \varphi.$$

Umformen ergibt

$$|a||b| \cos \varphi = \frac{1}{2}\Big(|b|^2 + |a|^2 - |b - a|^2\Big).$$

Aufgabe 5 II

Einsetzen der Definition des Skalarprodukts ergibt

$$a \cdot b = \frac{1}{2}\Big(|b|^2 + |a|^2 - |b-a|^2\Big).$$

Mit der bekannten Formel für den Betrag eines Vektors erhalten wir:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= \frac{1}{2}\Big(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \\ &\qquad - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2 - (b_3 - a_3)^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(2a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3\Big) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \end{aligned}$$

Aufgabe 6 a

a) Bestimmen der Geradengleichung $x_2 = ax_1 + b$ für die Punkte A und B:

Der Anstieg a ergibt sich als:

$$a = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{7-1}{3-1} = 3.$$

Einsetzen des Punkts A in $x_2 = 3x_1 + b$ ergibt:

$$1 = 3 \cdot 1 + b$$
$$b = -2$$

Die gesuchte Koordinatenform ist folglich:

$$-3x_1 + x_2 + 2 = 0.$$

Aufgabe 6 a-b

a) Die Punktprobe für A, B und C ist erfolgreich, alle 3 Punkte liegen auf der beschriebenen Geraden

b) Die Einträge eines Normalenvektors können an den Koeffizienten der Koordinatenform abgelesen werden. Es folgt

$$n = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7 a

Als mögliche Parameterform ergibt sich z.B.

$$\begin{aligned} x &= \overrightarrow{0A} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1-1 \\ 5-0 \\ 3-3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-0 \\ 0-3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Aufgabe 7 b

Berechnen des Normalenvektors mit dem Kreuzprodukt:

$$n = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Der Vektor n ist orthogonal zu den beiden Spannvektoren der Ebene $\mathcal{E}$ (und damit auch zur Ebene $\mathcal{E}$ selbst), da die jeweiligen Skalarprodukte 0 ergeben:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -15 \\ 6 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} &= -15 \cdot (-2) + (-6) \cdot 5 + (-20) \cdot 0 = 0 \\ \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} &= -15 \cdot 2 + (-6) \cdot 5 + (-20) \cdot (-3) = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 7 c-d

d) Überführen der Ebene in Koordinatenform mithilfe der Normalenform.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) &= 0 \\
\begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} &= 0 \\
-15x_1 - 6x_2 - 20x_3 + 75 &= 0
\end{aligned}$$

c)
- Es gilt $-15 \cdot 1 - 6 \cdot 10 - 20 \cdot 0 + 75 = 0$.
  $\Rightarrow P_1$ liegt in der Ebene $\mathcal{E}$;
- Es gilt $-15 \cdot (-3) - 6 \cdot 7 - 20 \cdot 4 + 75 = -2 \neq 0$.
  $\Rightarrow P_2$ liegt nicht in der Ebene $\mathcal{E}$.

Aufgabe 7 e

e) Bestimmen der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

- $x_2 = x_3 = 0$. Hieraus folgt $x_1 = 5$.
  Der Schnittpunkt mit der x_1-Achse ist $(5, 0, 0)$.
- $x_1 = x_3 = 0$. Hieraus folgt $x_2 = \frac{25}{2}$.
  Der Schnittpunkt mit der x_2-Achse ist $(0, \frac{25}{2}, 0)$.
- $x_1 = x_2 = 0$. Hieraus folgt $x_3 = \frac{15}{4}$.
  Der Schnittpunkt mit der x_3-Achse ist $(0, 0, \frac{15}{4})$.

Aufgabe 8 a-c, e

a) Es gilt $a \cdot b = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) = 5$.
Folglich sind a und b nicht orthogonal.

b) $\cos(\varphi) = \dfrac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \dfrac{5}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = \dfrac{5}{\sqrt{84}} = \dfrac{5}{2 \cdot \sqrt{21}}$.
Es folgt $\varphi = \arccos\left(\frac{5}{2 \cdot \sqrt{21}}\right) \approx 56,94^\circ$.

c) Es muss $a \cdot c = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot x + (-1) \cdot 0 = 0$ gelten.
Auflösen nach x ergibt $x = \frac{1}{2}$.

e) $|b| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$

Aufgabe 8 d

d) Es muss $c \cdot d = -1 \cdot 1 - 2y + 3x + 0z = 0$ gelten.

Aufschreiben als erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Überführen in Zeilenstufenform ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Wählen von Parametern $y = s$, $z = t$ (für $s, t \in \mathbb{R}$) und Auflösen nach x ergibt die Lösung:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}s \\ y &= s \\ z &= t \end{aligned}$$

Aufgabe 8 f

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a \cdot c}{|a| \cdot |c|} = \frac{-2+2x}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5+x^2}}$$

Umstellen, Quadrieren und Umstellen ergibt:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{5+x^2} &= -4+4x \\
12 \cdot (5+x^2) &= 16x^2 - 32x + 16 \\
4x^2 - 32x - 44 &= 0 \\
x^2 - 8x - 11 &= 0.
\end{aligned}$$

Lösen der quadratischen Gleichung liefert:

$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{27} = 4 \pm 3 \cdot \sqrt{3}.$$

Lediglich $x_1 = 4 + 3 \cdot \sqrt{3}$ stellt eine gültige Lösung für die ursprüngliche Fragestellung dar.