Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der ersten Abschlussklausur
Teil 1 (Lösungen)

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1

a) Nein. Das neutrale Element 0 ist nicht in $\mathbb{N}$ enthalten.

b) Nein. Nicht abgeschlossen, z.B. bei Division durch 0; kein neutrales Element.

c) Nein. Assoziativgesetz gilt nicht; kein neutrales Element.

d) Ja. Es gelten alle Eigenschaften eines Monoids.

Aufgabe 2

Die vier Elemente der Rechteckgruppe sind:

- die Identität (i);
- die Drehung um 180° (r);
- die beiden Spiegelungen an den Seitenhalbierenden (x, y).

Als Gruppentafel ergibt sich:

	i	r	x	y
i	i	r	x	y
r	r	i	y	x
x	x	y	i	r
y	y	x	r	i

Aufgabe 3

Zum Nachweis sind 2 Dinge zu zeigen:

- $a, b \in G \cap H \Rightarrow a \star b, b \star a \in G \cap H$
- $a \in G \cap H \Rightarrow a^{-1} \in G \cap H$

Zum Nachweis der ersten Eigenschaft genügt die folgende Begründung:

$$\begin{aligned} & a, b \in G \cap H \\ \Rightarrow\; & a, b \in G \quad \text{und} \quad a, b \in H \\ \Rightarrow\; & a \star b, b \star a \in G \quad \text{und} \quad a \star b, b \star a \in H \\ \Rightarrow\; & a \star b, b \star a \in G \cap H \end{aligned}$$

Der Nachweis der zweiten Eigenschaft erfolgt analog.

Es handelt sich bei $(G \cap H, \star)$ folglich um eine Untergruppe von $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$.

Aufgabe 4 I

Nach dem Satz von Lagrange gilt: $|G \cap H|$ teilt $|G|$ sowie $|G \cap H|$ teilt $|H|$. Als mögliche Ordnungen von $G \cap H$ kommen also 2, 4 und 8 infrage.

Diese Fälle müssen separat betrachtet werden.

Fall 1: $|G \cap H| = 2$:

Nach dem Satz von Lagrange können die Elemente nur Ordnung 1 oder 2 haben. Ordnung 1 kommt stets nur für das neutrale Element infrage. Das zweite Element muss Ordnung 2 haben.

Aufgabe 4 II

<u>Fall 2: $|G \cap H| = 4$:</u>

Nach dem Satz von Lagrange können die Elemente nur Ordnung 1, 2 oder 4 haben. Ordnung 1 kommt stets nur für das neutrale Element infrage. Die weiteren Elemente müssen Ordnung 2 oder Ordnung 4 haben. Für den Fall Ordnung 2 sind wir fertig. Hat ein Element a hingegen Ordnung 4, lässt sich mit a^2 ein Element der Ordnung 2 finden:

$$a^4 = \left(a^2\right)^2 = 1.$$

<u>Fall 3: $|G \cap H| = 8$:</u>

Dieser Fall funktioniert analog zu Fall 2.

Für jeden Fall lässt sich also zeigen, dass immer ein Element der Ordnung 2 existiert. $\square$

Aufgabe 5

Die beiden Gruppen der Ordnung 4 haben die folgenden Gruppentafeln:

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	b	c	1
b	b	c	1	a
c	c	1	a	b

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

Die linke Gruppe enthält Elemente der Ordnung 4, die rechte Gruppe nicht. Sie können also nicht isomorph sein. Die Entscheidung, ob Elemente der Ordnung 4 vorhanden oder nicht vorhanden sind, gibt die restliche Struktur der Gruppentafel vor. Die rechte Gruppe ist auch als Kleinsche Vierergruppe bekannt.

Aufgabe 6

S_3 sowie die durch $(1,2)$ erzeugte Untergruppe $\mathcal{H}$ von S_3 lauten:

$$S_3 = \Big\{id,\ (1,2),\ (1,3),\ (2,3),\ (1,2,3),\ (1,3,2)\Big\}$$
$$\mathcal{H} = \Big\{id,\ (1,2)\Big\}.$$

Es ergeben sich die folgenden Linksnebenklassen:

$$\begin{aligned}
id\mathcal{H} &= \Big\{id \circ id,\ id \circ (1,2)\Big\} = \Big\{id,\ (1,2)\Big\} \\
(1,3)\mathcal{H} &= \Big\{(1,3) \circ id,\ (1,3) \circ (1,2)\Big\} = \Big\{(1,3),\ (1,2,3)\Big\} \\
(2,3)\mathcal{H} &= \Big\{(2,3) \circ id,\ (2,3) \circ (1,2)\Big\} = \Big\{(2,3),\ (1,3,2)\Big\}.
\end{aligned}$$

Die "restlichen" Nebenklassen sind mit den bereits genannten identisch.