

Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der ersten Abschlussklausur
Teil 1 (Lösungen)

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1

- a) Nein. Das neutrale Element 0 ist nicht in \mathbb{N} enthalten.
- b) Nein. Nicht abgeschlossen, z.B. bei Division durch 0 ; kein neutrales Element.
- c) Nein. Assoziativgesetz gilt nicht; kein neutrales Element.
- d) Ja. Es gelten alle Eigenschaften eines Monoids.

Aufgabe 2

Die vier Elemente der Rechteckgruppe sind:

- die Identität (i);
- die Drehung um 180° (r);
- die beiden Spiegelungen an den Seitenhalbierenden (x, y).

Als Gruppentafel ergibt sich:

i					
r					
x					
y					

Aufgabe 3

Zum Nachweis sind 2 Dinge zu zeigen:

- $a, b \in G \cap H \Rightarrow a \star b, b \star a \in G \cap H$
- $a \in G \cap H \Rightarrow a^{-1} \in G \cap H$

Zum Nachweis der ersten Eigenschaft genügt die folgende Begründung:

$$\begin{aligned} & a, b \in G \cap H \\ & \Rightarrow a, b \in G \quad \text{und} \quad a, b \in H \\ & \Rightarrow a \star b, b \star a \in G \quad \text{und} \quad a \star b, b \star a \in H \\ & \Rightarrow a \star b, b \star a \in G \cap H \end{aligned}$$

Der Nachweis der zweiten Eigenschaft erfolgt analog.

Es handelt sich bei $(G \cap H, \star)$ folglich um eine Untergruppe von \mathcal{G} und \mathcal{H} .

Aufgabe 4 I

Nach dem Satz von Lagrange gilt: $|G \cap H|$ teilt $|G|$ sowie $|G \cap H|$ teilt $|H|$. Als mögliche Ordnungen von $G \cap H$ kommen also 2, 4 und 8 infrage.

Diese Fälle müssen separat betrachtet werden.

Fall 1: $|G \cap H| = 2$:

Nach dem Satz von Lagrange können die Elemente nur Ordnung 1 oder 2 haben. Ordnung 1 kommt stets nur für das neutrale Element infrage. Das zweite Element muss Ordnung 2 haben.

Aufgabe 4 II

Fall 2: $|G \cap H| = 4$:

Nach dem Satz von Lagrange können die Elemente nur Ordnung 1, 2 oder 4 haben. Ordnung 1 kommt stets nur für das neutrale Element infrage. Die weiteren Elemente müssen Ordnung 2 oder Ordnung 4 haben. Für den Fall Ordnung 2 sind wir fertig. Hat ein Element a hingegen Ordnung 4, lässt sich mit a^2 ein Element der Ordnung 2 finden:

$$a^4 = (a^2)^2 = 1.$$

Fall 3: $|G \cap H| = 8$:

Dieser Fall funktioniert analog zu Fall 2.

Für jeden Fall lässt sich also zeigen, dass immer ein Element der Ordnung 2 existiert. \square

Aufgabe 5

Die beiden Gruppen der Ordnung 4 haben die folgenden Gruppentafeln:

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	b	c	1
b	b	c	1	a
c	c	1	a	b

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

Die linke Gruppe enthält Elemente der Ordnung 4, die rechte Gruppe nicht. Sie können also nicht isomorph sein. Die Entscheidung, ob Elemente der Ordnung 4 vorhanden oder nicht vorhanden sind, gibt die restliche Struktur der Gruppentafel vor. Die rechte Gruppe ist auch als Kleinsche Vierergruppe bekannt.

Aufgabe 6

S_3 sowie die durch $(1, 2)$ erzeugte Untergruppe \mathcal{H} von S_3 lauten:

$$S_3 = \{id, (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$$
$$\mathcal{H} = \{id, (1, 2)\}.$$

Es ergeben sich die folgenden Linksnebenklassen:

$$id\mathcal{H} = \{id \circ id, id \circ (1, 2)\} = \{id, (1, 2)\}$$
$$(1, 3)\mathcal{H} = \{(1, 3) \circ id, (1, 3) \circ (1, 2)\} = \{(1, 3), (1, 2, 3)\}$$
$$(2, 3)\mathcal{H} = \{(2, 3) \circ id, (2, 3) \circ (1, 2)\} = \{(2, 3), (1, 3, 2)\}.$$

Die “restlichen” Nebenklassen sind mit den bereits genannten identisch.