Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der ersten Abschlussklausur
Teil 2 (Lösungen)

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1 a-b

a) Nach dem Satz von Lagrange können die Elemente nur Ordnung 1 oder Ordnung 5 haben. Ordnung 1 besitzt nur das neutrale Element. Die restlichen 4 Elemente haben Ordnung 5. Die Gruppe ist also zyklisch. Zyklische Gruppen derselben Ordnung sind immer isomorph.

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} a\left(bdc^{-1}\right)^{-1}bd^{-1}a\left(b^{-1}d^{-1}a\right)^{-1} &= acd^{-1}b^{-1}bd^{-1}aa^{-1}db \\ &= acd^{-1}d^{-1}db \\ &= acd^{-1}b \end{aligned}$$

Aufgabe 1 c

c) Bestimmen der durch 3 erzeugten Untergruppe von $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{H} = \langle 3 \rangle = \left\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 9\right\}.$$

Es ergeben sich die folgenden Nebenklassen:

$$1\mathcal{H} = \left\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 9\right\}$$
$$2\mathcal{H} = \left\{2,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10\right\}.$$

Aufgabe 2

a) Die Einheitengruppe $E(\mathbb{Z}_{42})$ besitzt die in $\mathbb{Z}_{42}$ invertierbaren Elemente:

$$E(\mathbb{Z}_{42}) = \left\{1,\ 5,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 25,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41\right\}$$

b) Die Ordnung von $E(\mathbb{Z}_{42})$ ist 12. Mögliche Ordnungen der Elemente sind 1, 2, 3, 4, 6 und 12. Die Gruppe ist nicht zyklisch, da kein Element die Ordnung 12 besitzt.

$$\begin{array}{lll}
5^6 \equiv 1 \pmod{42} & 19^6 \equiv 1 \pmod{42} & 31^6 \equiv 1 \pmod{42} \\
11^6 \equiv 1 \pmod{42} & 23^6 \equiv 1 \pmod{42} & 37^3 \equiv 1 \pmod{42} \\
13^2 \equiv 1 \pmod{42} & 25^3 \equiv 1 \pmod{42} & 41^2 \equiv 1 \pmod{42} \\
17^6 \equiv 1 \pmod{42} & 29^2 \equiv 1 \pmod{42} &
\end{array}$$

Aufgabe 3

- Es gibt insgesamt $\binom{15}{7}$ Möglichkeiten, die 7 Knoten für den Teilgraphen G aus dem vollständigen Graphen mit 15 Knoten auszuwählen.
- Die beiden in G fehlenden Kanten sollen nichtadjazent sein. Dies bedeutet, dass die Kanten keinen gemeinsamen Knoten haben. Von den 7 in G vorhandenen Knoten müssen also 4 Knoten für die beiden Kanten ausgewählt werden: $\binom{7}{4}$ Möglichkeiten.
- Die erste fehlende Kante ist die Verbindungskante zwischen 2 dieser Knoten; die andere Kante ergibt sich automatisch. Auf diese Art wird jede Variante doppelt gezählt, daher Division durch 2: $\frac{1}{2} \cdot \binom{4}{2}$ Möglichkeiten.
- Es gibt also $\binom{7}{4} \cdot \binom{4}{2}$ mögliche Graphen G.
- Insgesamt ergeben sich somit $\binom{15}{7} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{4}{2} \cdot \frac{1}{2}$ Graphen H.

Aufgabe 4

a) Aufschreiben der Vektoren als *Zeilen* einer Matrix und anschließendes Überführen in Zeilenstufenform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & 8 & -4 \\ -3 & 18 & -5 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 12 & 2 \\ 0 & 24 & 4 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alle Nicht-Null-Zeilen bilden eine Basis von $\mathrm{Lin}\,(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

b) $\mathrm{Lin}\,(v_1, v_2, v_3, v_4)$ besitzt die zwei Basisvektoren $b_1 = (1, 2, 3)$ und $b_2 = (0, 6, 1)$, d.h. $\dim\big(\mathrm{Lin}\,(v_1, v_2, v_3, v_4)\big) = 2$.

c) Es handelt sich um eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 5 I

Um zu zeigen, dass es sich um eine Basis von U handelt, muss Folgendes gezeigt werden:

(1) *Die Vektoren b_1 und b_2 sind linear unabhängig.*

Dies ist leicht zu sehen, da b_2 kein Vielfaches von b_1 ist.

Aufgabe 5 II

(2) *Jeder Vektor $u \in U$ ist eine Linearkombination von b_1 und b_2.*

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösen des Gleichungssystems ergibt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{2}{3} u_1 + \frac{1}{3} u_2 \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{3} u_1 + \frac{1}{3} u_2. \end{aligned}$$

Jeder Vektor u kann folglich als Linearkombination von b_1 und b_2 dargestellt werden.

Wegen (1) und (2) sind die Vektoren b_1 und b_2 eine Basis von U.

Aufgabe 6 a I

$$\text{(i)} \quad \det(A) = -2 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= -2 \cdot 11 - 1 \cdot 1$$
$$= -23$$

$$\text{(ii)} \quad \det(A) = (-5) \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= -5 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-6)$$
$$= -23$$

Aufgabe 6 a II

$$
\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad \det(A) &= 1 \cdot 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot (-5) + 0 \cdot 3 \cdot 1 \\
&\quad -0 \cdot 0 \cdot (-5) - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \\
&= -23
\end{aligned}
$$

$$
\text{(iv)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{23}{6} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1 \cdot (-6) \cdot \frac{23}{6} = -23
$$

Aufgabe 6 b+c

b) Wegen $\det(A) \neq 0$ ist die Matrix A invertierbar; anders gesagt: Die inverse Matrix A^{-1} existiert.

c) Es gilt

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)} = -\frac{1}{23}.$$

Aufgabe 7 I

a) U_1 ist kein Unterraum, da es nicht abgeschlossen bzgl. der skalaren Multiplikation ist. Es gilt z.B. $u = (-1, 0, 0, 0) \in U_1$, aber $-u = (1, 0, 0, 0) \notin U_1$.

b) U_2 ist wegen $(0, 0, 0, 0) \notin U_2$ kein Unterraum.

c) U_3 ist wegen $(0, 0, 0, 0) \notin U_3$ kein Unterraum.

d) $\rightarrow$ siehe nächste Folie

e) U_5 ist kein Unterraum, da es nicht abgeschlossen bzgl. der skalaren Multiplikation ist. Es gilt z.B. $u = (1, 0, 1, 0) \in U_5$, aber $2u = (2, 0, 2, 0) \notin U_5$.

Aufgabe 7 II

U_4 ist ein Unterraum.

(i) $U_4 \neq \emptyset$, da z.B. $0 \in U_4$ gilt.

(ii) Für $u, v \in U_4$ gilt $u + v \in U_4$.

$$\begin{aligned}
u + v &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_1 + u_2 - 2u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_1 + v_2 - 2v_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \\ u_1 + u_2 - 2u_3 + v_1 + v_2 - 2v_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \\ (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) - 2(u_3 + v_3) \end{pmatrix} \in U_4
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 III

(iii) Für $u \in U_4$ gilt $\lambda u \in U_4$.

$$\begin{aligned} \lambda u &= \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_1 + u_2 - 2u_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \\ \lambda(u_1 + u_2 - 2u_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \\ \lambda u_1 + \lambda u_2 - 2\lambda u_3 \end{pmatrix} \in U_4 \end{aligned}$$

Aufgabe 8

a) Die Menge U_1 aus Aufgabe 7a ist beispielsweise abgeschlossen bzgl. der Vektoraddition, nicht jedoch bezüglich der skalaren Multiplikation.

Analog lässt sich eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ definieren, die die gewünschten Eigenschaften besitzt:

$$U = \Big\{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 \geq 0 \Big\}.$$

b) Die folgende Menge U ist abgeschlossen bzgl. der skalaren Multiplikation, nicht jedoch gegenüber der Vektoraddition.

$$U = \Big\{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \cdot x_2 = 0 \Big\}.$$

Aufgabe 9

(I) Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt $f_1^2 = 1^2 = 1 \cdot 1 = f_1 \cdot f_2$. ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h. $\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_1^2 + \ldots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} f_i^2 + f_{n+1}^2 \\ &= f_n \cdot f_{n+1} + f_{n+1}^2 \\ &= f_{n+1} \cdot \left(f_n + f_{n+1}\right) \\ &= f_{n+1} \cdot f_{n+2}\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt die Behauptung. □

Aufgabe 10 a I

- Die Abbildung f ist nicht injektiv, da beispielsweise $f(1) = 2 = f(2)$ gilt.

- Zum Nachweis der Surjektivität genügt es zu zeigen, dass es zu jedem Element $y \in \mathbb{Z}$ mindestens ein Urbild $n \in \mathbb{Z}$ gibt, für das $f(n) = y$ gilt.

$$y = f(n) = \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor$$

Da die Gauß-Klammern nicht umkehrbar sind, betrachten wir eine ähnliche Funktion, die ohne die Gauß-Klammern auskommt:

$$y = f'(n) = \frac{n+3}{2}.$$

Für ungerade Werte von n liefern f und f' offenbar dieselben Ergebnisse.

Aufgabe 10 a II

Umstellen nach n ergibt:

$$n = 2y - 3 \quad (\Rightarrow n \in \mathbb{Z}).$$

Es bleibt nur noch zu überprüfen, ob das gefundene n tatsächlich ein Urbild für y ist.

$$\begin{aligned} f(2y-3) &= \left\lfloor \frac{2y - 3 + 3}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{2y}{2} \right\rfloor \\ &= \lfloor y \rfloor \\ &= y \end{aligned}$$

Da $n = 2y - 3$ ein Urbild für y ist, ist die Abbildung f surjektiv.

Aufgabe 10 b

- $u(a, b)$ ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned} u(a,b) &= u(x,y) \\ \big(ba, 5a+1\big) &= \big(yx, 5x+1\big) \end{aligned}$$

  Es folgt

$$\begin{aligned} ba &= yx \qquad (1) \\ 5a+1 &= 5x+1 \qquad (2) \end{aligned}$$

  Aus (2) folgt direkt $a = x$. Einsetzen in (1) und Division durch a ($a \neq 0$ wegen $a \in \mathbb{N}$) ergibt $b = y$;

- $u(a, b)$ ist nicht surjektiv, da beispielsweise $u(a, b) = (\star, 2)$ kein Urbild besitzt.

Aufgabe 11

Bestimmte Matrixumformungen beeinflussen die Determinante:

- Transponieren der Matrix ändert die Determinante nicht.
- Beim Vertauschen von zwei Zeilen (Spalten) wird die Determinante mit -1 multipliziert.
- Beim Multiplizieren einer Zeile (Spalte) mit einer Konstanten $c \neq 0$ wird auch die Determinante mit c multipliziert.
- Addition eines Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte) ändert die Determinante nicht.

Für die Matrizen B und B^{-1} ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(A) \cdot (-1) \cdot 2 = 7 \cdot (-1) \cdot 2 = -14 \\ \det\left(B^{-1}\right) &= \frac{1}{\det(B)} = -\frac{1}{14} \end{aligned}$$

Aufgabe 12 a, c-e

a) **Falsch**.
Wegen $\dim(Z(A)) = 2$ gibt es in Zeilenstufenform 2 Nicht-Nullzeilen und 2 Nullzeilen und somit bei insgesamt 4 Variablen 2 führende und 2 freie Variablen. Verwendung von Parametern s und t für die freien Variablen resultiert in unendlich viele Lösungen des Gleichungssystems.

c) **Falsch**.
Wegen $\dim(Z(A)) = 2 < 4$ besitzt die Matrix in Zeilenstufenform 2 Nullzeilen. Eine Matrix ist Zeilenstufenform ist automatisch eine Dreiecksmatrix. Berechnen der Determinanten als Produkt der Hauptdiagonalenelemente ergibt folglich $\det(A) = 0$.

d) **Wahr**.
Aufgrund der Nullzeilen in Zeilenstufenform kann die Matrix nicht in die Einheitsmatrix überführt werden.

e) **Wahr**.
Es gilt $\dim(S(A)) = 2$. Die 4 Spaltenvektoren $s_1, \ldots, s_4 \in S(A)$ können folglich nicht linear unabhängig sein.

Aufgabe 12 b

b) **Wahr**.
Für eine $n \times m$ Matrix M gelten stets folgende Eigenschaften:

- $\dim(Z(M)) + \dim(N(M)) = n$
- $\dim(S(M)) + \dim(N(M^T)) = m$
- $\dim(Z(M)) = \dim(S(M))$

Für die Matrix A folgt

$$\begin{aligned} m \;=\; 4 &= \dim(S(A)) + \dim(N(A^T)) \\ &= \dim(Z(A)) + \dim(N(A^T)) \\ &= 2 + \dim(N(A^T)). \end{aligned}$$

Hieraus folgt unmittelbar $\dim(N(A^T)) = 2$.

Aufgabe 13

a) Es gibt $2^{|A \times A|} = 2^{16} = 65.536$ binäre Relationen R_a.

b) Es gibt $2^{|A \times B \times A|} = 2^{4 \cdot 6 \cdot 4} = 2^{96}$ ternäre Relationen R_b.

c) Die Elemente $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ und $(4,4)$ müssen enthalten sein. Die restlichen 12 Elemente können enthalten oder nicht enthalten sein. Es existieren folglich $2^{12} = 4.096$ reflexive binäre Relationen über A.

d) Es existieren $2^4 \cdot 2^6 = 2^{10} = 1.024$ symmetrische binäre Relationen über A.

Aufgabe 14 a-e

a) **Wahr**.
Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sind gleichmächtig, folglich exisitieren bijektive Abbildungen.

b) **Falsch**.
Die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind gleichmächtig, folglich exisitieren bijektive (und somit auch injektive) Abbildungen.

c) **Falsch**.
Die Mächtigkeit der Menge $\mathbb{R}$ ist größer als die Mächtigkeit der Menge $\mathbb{N}$. Es kann folglich keine surjektiven Abbildungen geben.

d) **Falsch**.
Dies ist keine hinreichende Bedingung für Hamiltonkreise.

e) **Falsch**.
Nach dem Schubfachprinzip unmöglich. Es kann nicht zeitgleich einen Knoten mit Grad 0 und einen Knoten mit Grad 4 geben. Es verbleiben 4 mögliche Grade für 5 Knoten.

Aufgabe 14 f-j

f) **Falsch**.
Es gilt bspw. für $A = \{1, 2\}$ und $R = \{(1, 1)\} \subseteq A \times A$: R ist symmetrisch und es gilt $|R| = 1$.

g) **Falsch**.
2703 und 3012 sind nicht teilerfremd; ein gemeinsamer Teiler ist bspw. 3. Folglich existiert kein Inverses.

h) **Wahr**.
Die Relation aus f) ist symmetrisch und gleichzeitig eine Ordnungsrelation.

i) **Falsch**.
Es gilt lediglich $\dim\big(\mathrm{Lin}\,(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)\big) \leq 5$; insbesondere könnte auch $\dim\big(\mathrm{Lin}\,(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)\big) < 4$ gelten.

j) **Falsch**.
Das Kreuzprodukt existiert nur im $\mathbb{R}^3$.