Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 15.01.2016
Lösungen der Aufgaben (Teil 1)

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

© 2016 Steven Köhler

Aufgabe 1

$$R = \Big\{(a,a),(a,b),(b,b),(c,a),(d,a),(b,a),(a,d),(d,d)\Big\}$$

(i) Falsch; es gilt beispielsweise $(a,c) \notin R$.

(ii) Falsch; es gilt beispielsweise $(a,b) \in R$ und $(b,a) \in R$.

(iii) Falsch; es gilt $(c,c) \notin R$.

(iv) Falsch; es gilt beispielsweise $(a,a) \in R$.

(v) Falsch; es gilt beispielsweise $(b,a),(a,d) \in R$, aber nicht $(b,d) \in R$.

© 2016 Steven Köhler

Aufgabe 2

a) $R_a = \Big\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (1,2),\ (2,3)\Big\}$

- nicht transitiv, da z.B. $(1,3)$ fehlt

b) $R_b = \Big\{(1,1)\Big\}$

- triviale Symmetrie, triviale Transitivität, nicht irreflexiv

c) $R_c = \Big\{(1,2),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,2),\ (1,3)\Big\}$

- nicht symmetrisch, da $(3,1)$ fehlt
- nicht antisymmetrisch, da z.B. $(2,3)$ und $(3,2)$ enthalten ist.

d) $R_d = \emptyset$

- nicht reflexiv, folglich weder Äquivalenz- noch Ordnungsrelation

© 2016 Steven Köhler

Aufgabe 3

a) Es gibt $2^{|A \times A|} = 2^{16} = 65.536$ binäre Relationen R_a.

b) Es gibt $2^{|A \times B \times A|} = 2^{4 \cdot 6 \cdot 4} = 2^{96}$ ternäre Relationen R_b.

c) Die Elemente $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ und $(4, 4)$ müssen enthalten sein. Die restlichen 12 Elemente können enthalten sein oder nicht enthalten sein. Es existieren folglich $2^{12} = 4.096$ reflexive binäre Relationen über A.

d) Es existieren $2^4 \cdot 2^6 = 2^{10} = 1.024$ symmetrische binäre Relationen über A.

© 2016 Steven Köhler

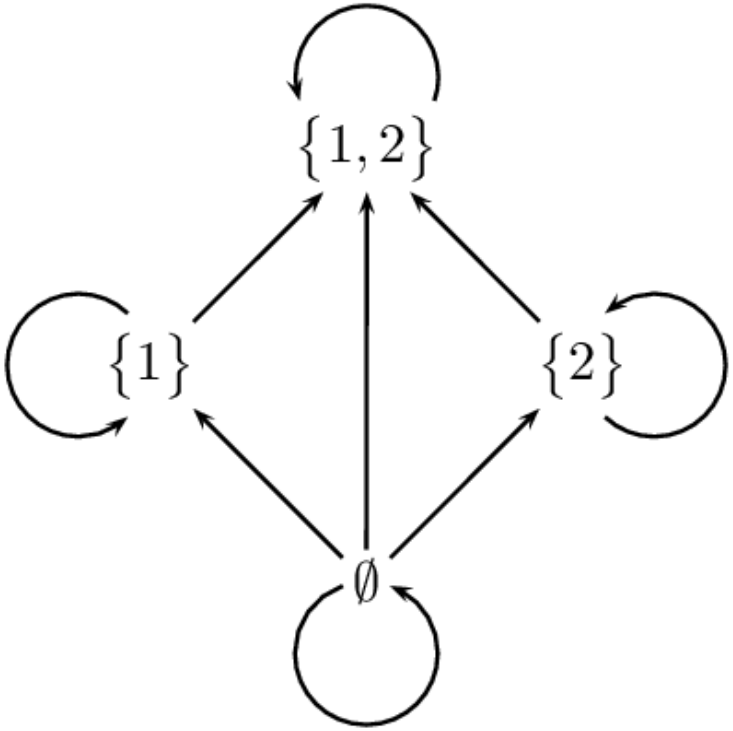
Aufgabe 4

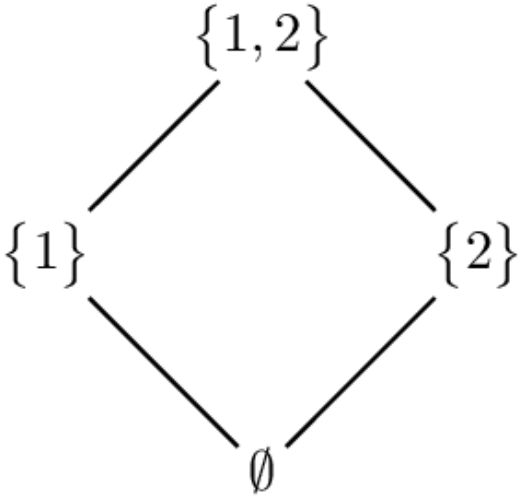
a) Es gilt beispielsweise $(-1, 0) \in R$ und $(0, 1) \in R$ gilt, aber nicht $(-1, 1) \in R$. Die Relation R ist also nicht transitiv und somit keine Äquivalenzrelation.

b) Für $x \neq 0$ gilt $x^2 > 0$; die Relation S ist also reflexiv. Aus $(x, y) \in S$ folgt $xy > 0$ und somit wegen der Kommutativität der Multiplikation auch $yx > 0$, woraus $(y, x) \in S$ folgt; S ist symmetrisch. Gilt $(x, y) \in S$ und $(y, z) \in S$, so besitzten x, y sowie y, z und damit auch x, z dasselbe Vorzeichen; entweder sind x, z beide positiv oder beide negativ. In beiden Fällen gilt $xz > 0$ und somit $(x, z) \in S$; S ist somit transitiv.
$\Rightarrow S$ ist eine Äquivalenzrelation, die positiven und die negativen Zahlen bilden die beiden Äquivalenzklassen.

© 2016 Steven Köhler

Aufgabe 5a

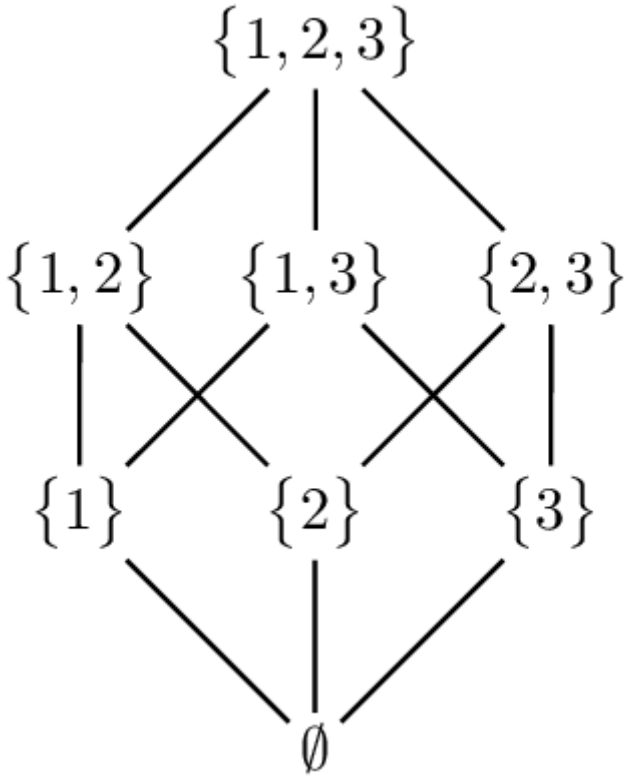




© 2016 Steven Köhler

Aufgabe 5b

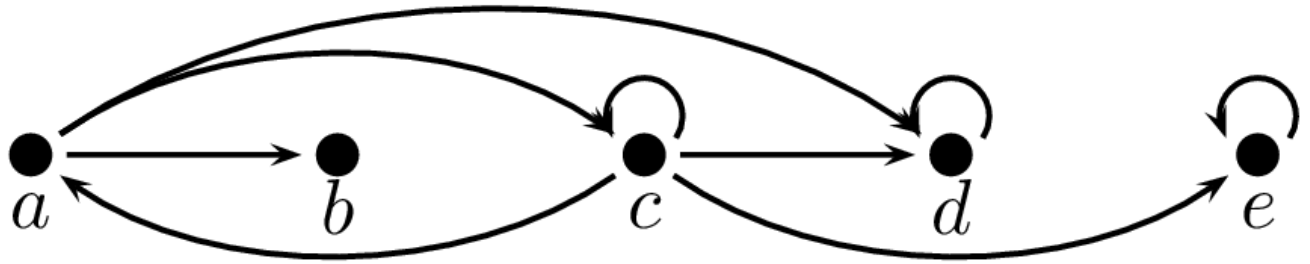
$$P(M) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}$$



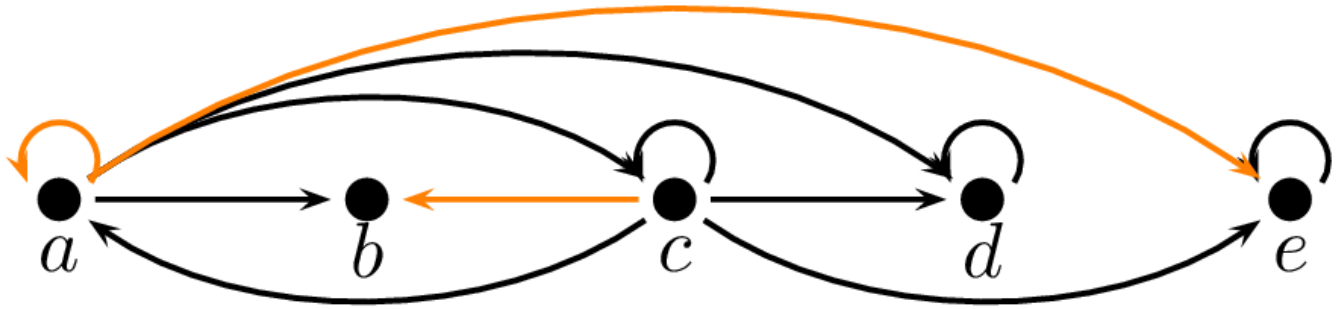
© 2016 Steven Köhler

Aufgabe 6

a)



b)



© 2016 Steven Köhler

Aufgabe 7

Für jeden Graphen gilt:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|. \qquad (\star)$$

Für den Graphen G gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} d(v) &= 16 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 55 \cdot 5 + 42 \cdot 7 \\ &= 615 \end{aligned}$$

Nach $(\star)$ muss die Summe der Knotengrade stets gerade sein. Bei G handelt es sich folglich nicht um einen gültigen Graphen.

© 2016 Steven Köhler

Aufgabe 8

a) Es gibt insgesamt 3^n Möglichkeiten, ein n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ zu erzeugen, wenn $x_i \in \{0, 1, 2\}$ (für $i = 1, \ldots, n$) gelten soll. Folglich besitzt der Graph H_n insgesamt 3^n Knoten.

b) Es gibt $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten, die 2 Stellen auszuwählen, an denen sich zwei verbundene Tupel unterscheiden. Es gibt insgesamt $2^2 = 4$ Tupel, die sich nur an den zwei ausgewählten Stellen von einem Tupel unterscheiden. Jeder Knoten ist folglich mit $\binom{n}{2} \cdot 4$ anderen Knoten verbunden. Es existieren folglich

$$3^n \cdot \binom{n}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 3^n \cdot \binom{n}{2}$$

Kanten.

© 2016 Steven Köhler

Aufgabe 9

a) H_1 besitzt $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ Kanten. H_2 besitzt $2n-1$ Kanten. Für die Verbindung von H_1 und H_2 werden $n \cdot 2n = 2n^2$ Kanten benötigt. Als Gesamtanzahl der Kanten von G folgt:

$$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 2n - 1 + 2n^2 = \frac{5}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 1.$$

b) Für $n >= 3$ gilt: Besitzt der Baum z.B. die Form eines Sterns, so existiert kein Hamiltonkreis.

c) Die Knoten von H_1 haben den Grad $3n-1$; dieser ist ungerade, falls n gerade ist. Es existiert dann keine Eulersche Linie.

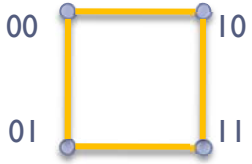
© 2016 Steven Köhler

Aufgabe 10 I

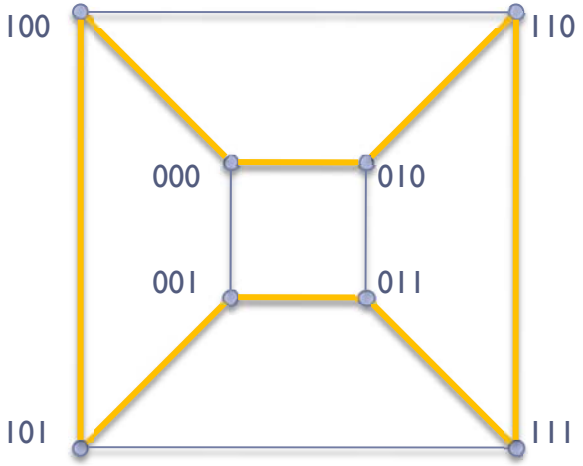
Induktionsanfang

Die Hyperwürfel Q_2 und Q_3 besitzen Hamiltonkreise.

Hyperwürfel Q_2



Hyperwürfel Q_3



© 2016 Steven Köhler

Aufgabe 10 II

Induktionsannahme

Für ein fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$ besitzt der Hyperwürfel Q_n einen Hamiltonkreis.

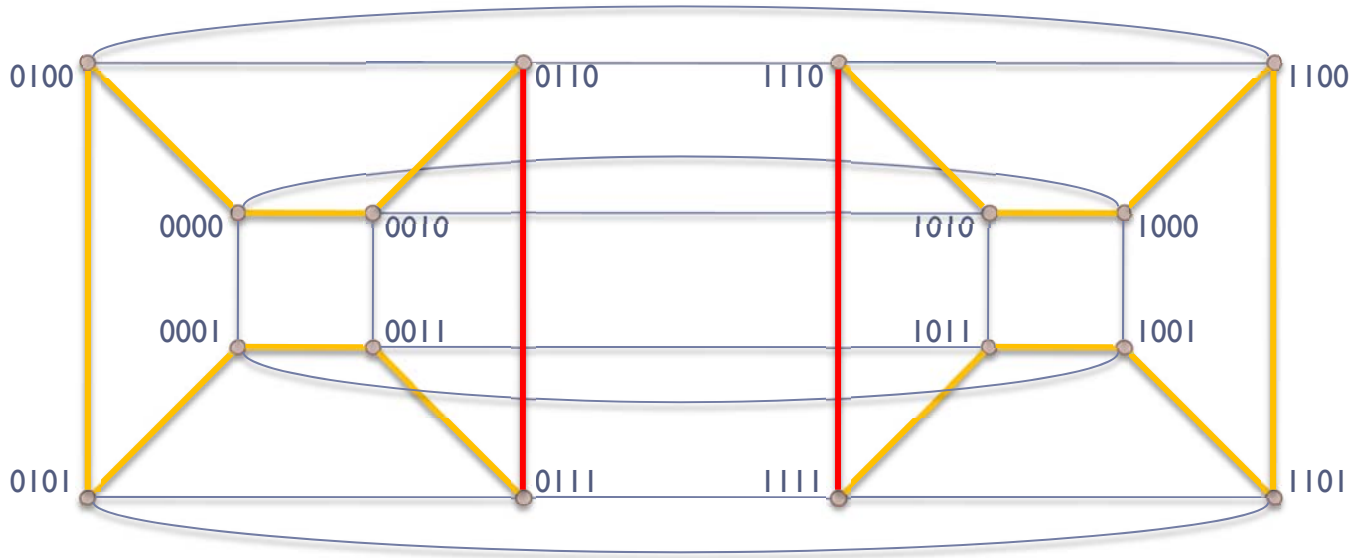
Induktionsschritt

Der Hyperwürfel Q_{n+1} entsteht aus Q_n, indem man Q_n verdoppelt (und die Kopie spiegelt) und die entsprechenden Verbindungskanten hinzufügt.

© 2016 Steven Köhler

Aufgabe 10 III

Demonstration am Beispiel von Q_4:

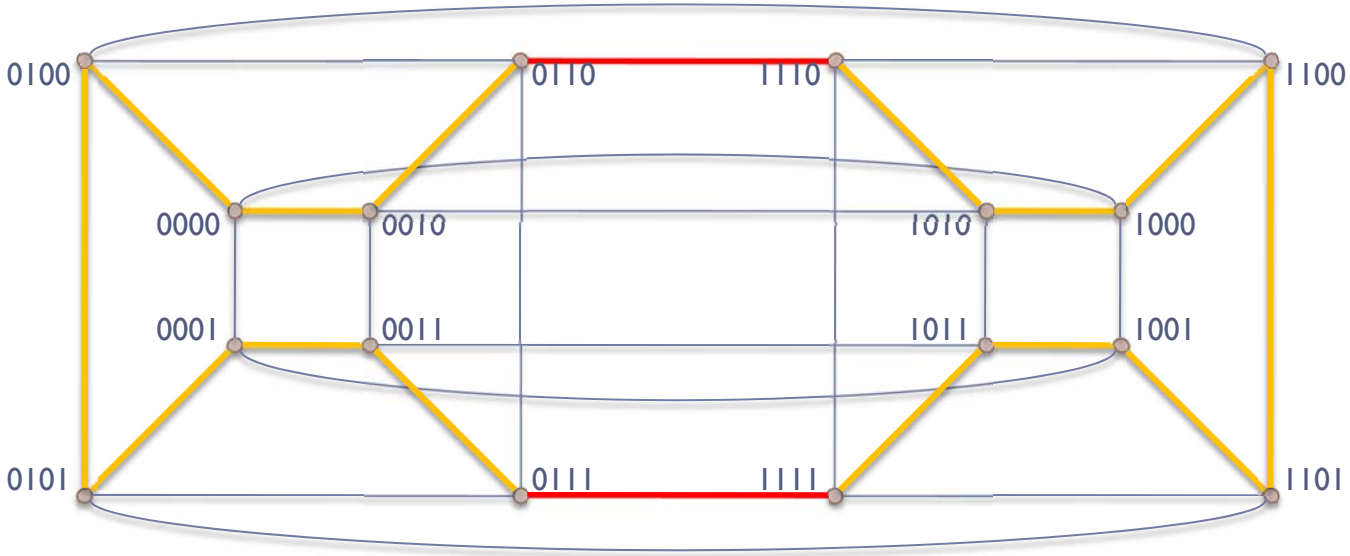


Die orangenen (bzw. roten) Kanten sind die Hamiltonkreise der beiden enthaltenen Hyperwürfel Q_3. Die beiden roten Kanten werden aus den Hamiltonkreisen "entfernt", die orangenen Kantenzüge werden neu verbunden.

© 2016 Steven Köhler

Aufgabe 10 IV

Es entsteht der Hamiltonkreis des Q_4:



Auf diese Art lässt sich ein Hamiltonkreis für jeden Hyperwürfel Q_{n+1} aus den (nach der Induktionsannahme exitierenden) Hamiltonkreisen der beiden Hyperwürfel Q_n konstruieren. $\square$

© 2016 Steven Köhler

Aufgabe 11

(i) Falsch, die Aussage gilt nur für vollständige Graphen mit mindestens 3 Knoten.

(ii) Wahr. Jede Kante erhöht die Summe der Knotengrade um 2.

(iii) Falsch, der Graph muss zusätzlich zusammenhängend sein.

(iv) Wahr, da ein ungerichteter Graph maximal $\binom{n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ Knoten besitzen kann.

(v) Falsch. Es existieren 2 Knoten mit Grad 3.

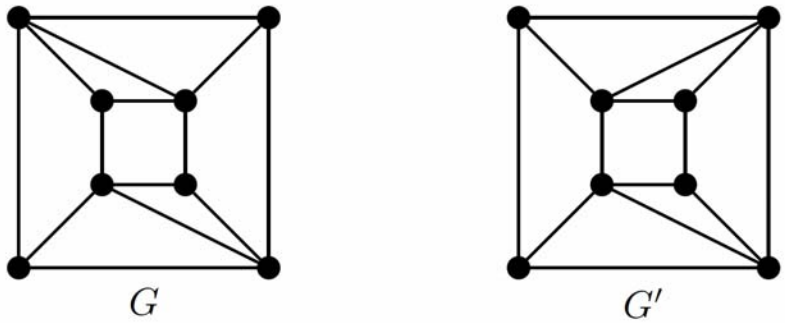
(vi) Falsch. In der richtigen Bedingung heißt es $\leq$ statt $<$; außerdem ist diese Bedingung zwar notwendig, aber nicht hinreichend.

© 2016 Steven Köhler

Aufgabe 12

Die beiden Graphen sind nicht isomorph: Dies kann beispielsweise durch eine der folgenden Aussagen begründet werden:

- In G' existieren Knoten mit Grad 4, die mit zwei Knoten von Grad 4 benachtbart sind; in G nicht.
- In G' existiert ein Pfad der Länge 4, der nur Knoten von Grad 4 enthält; in G nicht.
- In G' existieren Knoten mit Grad 3, die mit Knoten von Grad 3 benachbart sind; in G nicht.



© 2016 Steven Köhler

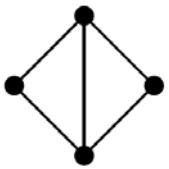
Aufgabe 13

a) G besitzt $\binom{10}{2} = 45$ Kanten.

b) Es gibt $\binom{10}{3}$ Möglichkeiten, 3 Knoten auszuwählen. Aus je 3 Knoten kann exakt 1 Kreis erzeugt werden. G besitzt folglich $\binom{10}{3} = 120$ Kreise der Länge 3.

c) Es gibt $\binom{10}{4}$ Möglichkeiten, 4 Knoten auszuwählen. Aus je 4 Knoten können 3 verschiedene Kreise erzeugt werden. G besitzt folglich $\binom{10}{4} \cdot 3 = 630$ Kreise der Länge 4 (vgl. Hausaufgabe 1, Blatt 8).

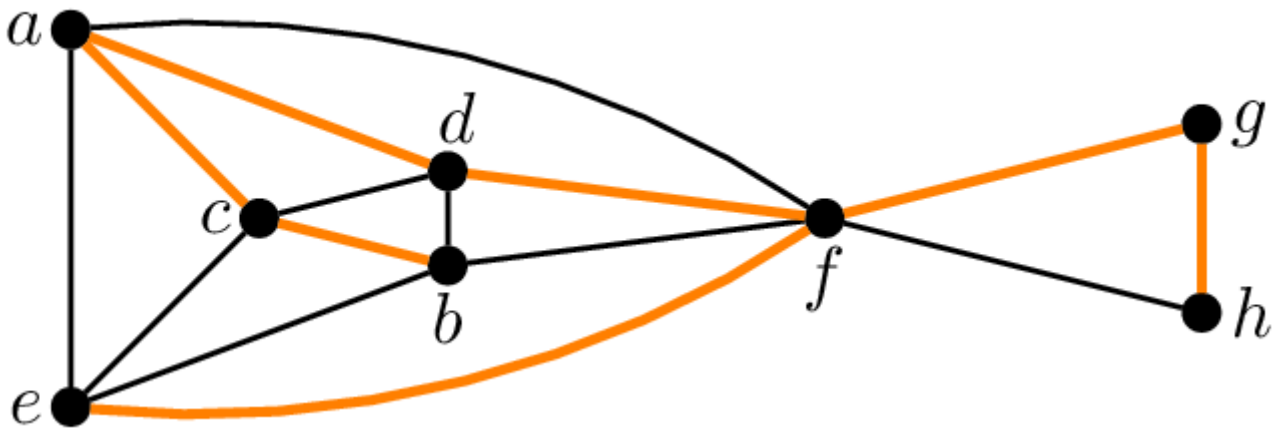
d) Für jeden der Kreise aus c) gibt es 2 Möglichkeiten, die Diagonale im Kreis zu wählen. Es gibt insgesamt also $2 \cdot 630 = 1260$ Graphen, die isomorph zum angegebenen Graphen sind.



© 2016 Steven Köhler

Aufgabe 14 I

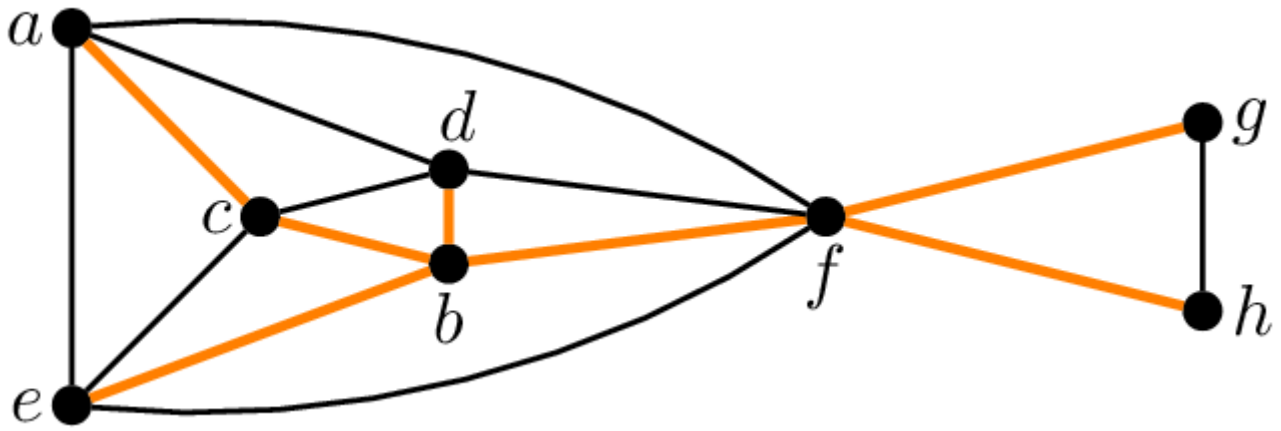
Für die Tiefensuche ergibt sich der folgende Baum:



© 2016 Steven Köhler

Aufgabe 14 II

Für die Breitensuche ergibt sich der folgende Baum:



© 2016 Steven Köhler