Vorkurs: Mathematik für Informatiker

Lösungen

Wintersemester 2019/20

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Dimitri Popov

popov@informatik.uni-hamburg.de

Florian Schneider

fschneider@informatik.uni-hamburg.de

Aufgabe I-1

Es seien $A = \{5, 7, 9\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ und $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ gegeben. Es gilt:

a) $A \cup B = \left\{5, 6, 7, 9\right\}$

$A \cap C = \left\{5, 7, 9\right\} = A$

$C \setminus A = \left\{1, 3\right\}$

$A \triangle B = \left\{6, 9\right\}$

b) $A \cap B \cap C = \left\{5, 7\right\}$

c) $\mathcal{P}(B) = \left\{\emptyset, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}, \{5, 6, 7\}\right\}$

d) $A \times B =$
$\left\{(5, 5), (5, 6), (5, 7), (7, 5), (7, 6), (7, 7), (9, 5), (9, 6), (9, 7)\right\}$

Aufgabe I-2

Es gilt:

a) $\mathcal{P}(\emptyset) = \Big\{\emptyset\Big\}$

b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}$

Aufgabe III-1

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$

b) $\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{10}{12} = \frac{3}{24} - \frac{1}{24} + \frac{20}{24} = \frac{22}{24} = \frac{11}{12}$

c) $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \frac{1}{20} - \frac{6}{20} = -\frac{5}{20} = -\frac{1}{4}$

d) $\left(\frac{6}{7} : \frac{12}{10}\right) \cdot 2 + \frac{3}{-7} = \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{12} \cdot 2 + \frac{3}{-7} = \frac{10}{7} - \frac{3}{7} = 1$

Aufgabe III-2

a) $\frac{3}{2}x^2$ b) $\frac{a}{4}$ c) $-\frac{1}{36}$ d) $\frac{5}{2}y$

e) a^3 f) $-\frac{1}{a^4}$ g) xy^2 h) $\frac{b^{10}c^3}{a^3}$

Aufgabe III-3a

$$\frac{3}{2a^2} - \frac{4ab-1}{4ab} + 2 = \frac{3 \cdot 2b - (4ab-1) \cdot a + 2 \cdot 4a^2 b}{4a^2 b}$$

$$= \frac{6b - 4a^2 b + a + 8a^2 b}{4a^2 b}$$

$$= \frac{4a^2 b + 6b + a}{4a^2 b}$$

Aufgabe III-3b

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{x^2 - xy} - \frac{y}{x^2 + xy} - \frac{x}{x^2 - y^2} &= \frac{x}{x(x-y)} - \frac{y}{x(x+y)} - \frac{x}{(x+y)(x-y)} \\
&= \frac{x \cdot (x+y) - y \cdot (x-y) - x \cdot x}{x(x+y)(x-y)} \\
&= \frac{x^2 + xy - xy + y^2 - x^2}{x(x+y)(x-y)} \\
&= \frac{y^2}{x(x+y)(x-y)}
\end{aligned}
$$

Aufgabe III-3c-d

$$\frac{a-3b}{5a+1} \cdot \frac{25a^2-1}{a^2-6ab+9b^2} = \frac{a-3b}{5a+1} \cdot \frac{(5a+1)(5a-1)}{(a-3b)^2}$$

$$= \frac{5a-1}{a-3b}$$

$$\frac{2x-3}{5x} : \frac{4x^2-9}{10x^2} = \frac{2x-3}{5x} \cdot \frac{10x^2}{(2x+3)(2x-3)}$$

$$= \frac{2x}{2x+3}$$

Aufgabe IV-1

a) 27	b) 49	c) -125
d) -16	e) 36	f) -225

Aufgabe IV-2 a-b

$$\begin{aligned}7\sqrt{x}+\sqrt{2}\sqrt{8y}-\sqrt{16x}-4\sqrt{y} &= 7\sqrt{x}-\sqrt{16x}+\sqrt{2\cdot 8\cdot y}-4\sqrt{y}\\ &= 7\sqrt{x}-4\sqrt{x}+4\sqrt{y}-4\sqrt{y}\\ &= 3\sqrt{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{11}{60}}\cdot\sqrt{\frac{12}{55}} &= \sqrt{\frac{11\cdot 12}{60\cdot 55}}\\ &= \sqrt{\frac{1}{5\cdot 5}}\\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

Aufgabe IV-2 c-d

$$\begin{aligned}\sqrt{0,1} \cdot \sqrt{0,121} &= \sqrt{0,0121} \\ &= 0,11\end{aligned}$$

$$(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b}) = a^2 - b$$

Aufgabe IV-3 & IV-4

Aufgabe IV-3

a) $r = 2$ b) $r = 5$

c) $r = 1000$ d) $r = \frac{1}{16}$

Aufgabe IV-4

a) $r = 3$ b) $r = -1$

c) $r = 5 - 4 + 3 = 4$ d) $r = \frac{3}{2}$

Aufgabe IV-5

n entspricht 1600 Jahren. Es gilt

$$\begin{aligned} 10g \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n &= 1,25g \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \frac{1,25g}{10g} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Hieraus folgt direkt, dass $n = 3$ gilt. Es dauert also $3 \cdot 1600 = 4800$ Jahre, bis die 10g Radium 88 zu 1,25g zerfallen sind.

Aufgabe V-1, V-2 & V-3

Aufgabe V-1

a) a^{11} b) $20x^7$

c) $9z^9$ d) $-20x^6$

Aufgabe V-2

a) a^{-x} b) x^{2-2b}

c) $\frac{3}{y^2}$ d) $a^{-4}b^{5+y}$

Aufgabe V-3

a) x^4 b) $x^{\frac{3}{5}}$ c) $a^{\frac{5}{28}}$

Aufgabe V-4 a-b

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a}{2b}\right) &= \log a - \log(2b)\\ &= \log a - \log b - \log 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log\left(a^3\right) + \log\left(\sqrt{b}\right) - \log\left(ab^2\right) &= 3\log a + \frac{1}{2}\log b - \left(\log a + 2\log b\right)\\ &= 2\log a - \frac{3}{2}\log b\end{aligned}$$

Aufgabe V-4 c-d

$$\log\left(\sqrt[3]{a^2}\right) - \log a + 2\log\left(\frac{1}{7}a\right) = \frac{2}{3}\log a - \log a + 2\left(\log\left(\frac{1}{7}\right) + \log a\right)$$

$$= \frac{5}{3}\log a - 2\log 7$$

$$\log\left(\frac{a^2 b^{-1} c}{a c^{-3} b}\right) = \log\left(a b^{-2} c^4\right)$$

$$= \log a - 2\log b + 4\log c$$

Aufgabe V-4 e

$$
\begin{aligned}
\log\left(\frac{a^2c+ac}{ab}-\frac{c}{b}\right) &= \log\left(\frac{a^2c+ac-ac}{ab}\right) \\
&= \log\left(\frac{a^2c}{ab}\right) \\
&= \log\left(ab^{-1}c\right) \\
&= \log a - \log b + \log c
\end{aligned}
$$

Aufgabe VII-1

Die folgenden Operationen sind assoziativ:

- Addition
- Multiplikation

Die restlichen Operationen sind nicht assoziativ.

Aufgabe VII-2

Die folgenden Operationen sind kommutativ:

- Addition
- Multiplikation

Die restlichen Operationen sind nicht kommutativ.

Aufgabe VII-3

Für rationale Zahlen $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ und $r_3 = \frac{p_3}{q_3}$ gilt:

$$\begin{aligned}
(r_1 + r_2) + r_3 &= \left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right) + \frac{p_3}{q_3} \\
&= \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2} + \frac{p_3}{q_3} \\
&= \frac{(p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3) + p_3 q_1 q_2}{q_1 q_2 q_3} \\
&= \frac{p_1 q_2 q_3 + (p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2)}{q_1 q_2 q_3} \\
&= \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2 q_3 + p_3 q_2}{q_2 q_3} \\
&= \frac{p_1}{q_1} + \left(\frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3}\right) \\
&= r_1 + (r_2 + r_3)
\end{aligned}$$

Aufgabe XI-1

$$\sum_{1 \le k \le 4} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\sum_{\substack{1 \le i \le 10 \\ i:\ \text{gerade}}} a_i = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$$

$$\sum_{\substack{0 \le j \le 10 \\ j:\ \text{ungerade}}} 2^j = 2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9$$

$$\sum_{\substack{1 \le j \le 15 \\ j:\ \text{Primzahl}}} b_j = b_2 + b_3 + b_5 + b_7 + b_{11} + b_{13}$$

$$\sum_{\substack{1 \le k \le 50 \\ k:\ \text{Quadratzahl}}} a_k = a_1 + a_4 + a_9 + a_{16} + a_{25} + a_{36} + a_{49}$$

Aufgabe XI-2

a) wahr

b) falsch

c) wahr

d) falsch

Aufgabe XII-1 a-c

$$a(x) + b(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$$

$$a(x) - b(x) = x^3 + 2x^2 - 6x + 1$$

$$\begin{aligned} a(x) \cdot b(x) &= x^4 + 2x^3 + 2x^3 + 4x^2 - 5x^2 - 10x + 3x + 6 \\ &= x^4 + 4x^3 - x^2 - 7x + 6 \end{aligned}$$

Aufgabe XII-1 d

$$
\begin{array}{rllllll}
 & x^3 & +2x^2 & -5x & +3 & & :(x+2) = x^2 - 5 \\
- & (x^3 & +2x^2) & & & & \\
\hline
 & & & -5x & +3 & & \\
 & - & & (-5x & -10) & & \\
\hline
 & & & & 13 & &
\end{array}
$$

Es gilt

$$x^3 + 2x^2 - 5x + 3 = (x^2 - 5) \cdot (x + 2) + 13.$$

Aufgabe XIII-1

a) $x = \frac{5}{4}$ $y = \frac{15}{8}$

b) $x = 1$ $y = 3$

c) $x = -1$ $y = 2$

Aufgabe XIII-2 a

Es ergibt sich das folgende Gleichungssystem (p = Paul; v = Vater):

$$p + v = 33$$

$$p + 30 = \frac{1}{2}\left(v + 30\right).$$

Umformen und Auflösen des Gleichungssystems ergibt

$$p = 1 \qquad \text{und} \qquad v = 32.$$

Aufgabe XIII-2 b

Es ergibt sich das folgende Gleichungssystem (m_i = Michael; m_u = Mutter):

$$m_i = \frac{1}{2} m_u$$
$$m_i + 2 + m_u + 2 = 100.$$

Umformen und Auflösen des Gleichungssystems ergibt

$$m_i = 32 \qquad \text{und} \qquad m_u = 64.$$

Aufgabe XIII-3

a) $x_1 = -4$ sowie $x_2 = 2$

b) $x_1 = \sqrt{7}$ sowie $x_2 = -\sqrt{7}$

c) $x_1 = 0$ sowie $x_2 = \frac{1}{3}$

d) $x_1 = 0$ sowie $x_2 = 1$

e) $x_1 = \frac{8+2\cdot\sqrt{163}}{49}$ sowie $x_2 = \frac{8-2\cdot\sqrt{163}}{49}$

f) keine Lösung

Aufgabe XV-1

Es sei n eine ungerade ganze Zahl. Dann lässt sich n als $n = 2k+1$ darstellen, wobei k eine ganze Zahl ist. Daraus folgt mithilfe der ersten binomischen Formel:

$$n^2 = \left(2k+1\right)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot \underbrace{\left(2k^2 + 2k\right)}_{\in \mathbb{Z}} + 1.$$

Aus dieser Darstellung folgt, dass n^2 ungerade ist. $\square$

Aufgabe XV-2

Man berechnet zunächst die doppelte Summe. Der erste und der letzte, der zweite und der vorletzte, der dritte und der vorvorletzte (usw.) Summand ergeben in der Summe stets $n+1$:

$$\begin{aligned} 2\cdot\Big(1+2+\ldots+(n-1)+n\Big) &= (1+n)+\Big(2+(n-1)\Big)+\ldots+(n+1) \\ &= n\cdot(n+1) \end{aligned}$$

Damit wir die einfache Summe erhalten, teilen wir diesen Ausdruck durch 2 und erhalten:

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Diese Aufgabe (samt Lösung) ist auch als der „kleine Gauß“ bekannt.

Aufgabe XV-3

Es existieren (unter Zuhilfenahme des Hinweises) 1 Million verschiedene Möglichkeiten für die Anzahl an Haaren. Da Hamburg etwa 1,8 Millionen Einwohner hat, müssen nach dem Schubfachprinzip folglich mindestens 2 Personen dieselbe Anzahl an Haaren auf dem Kopf haben.

Aufgabe XV-4 I

Wir wollen annehmen, dass die Behauptung falsch ist, d.h., wir nehmen an, dass es ein $a \in \mathbb{Q}$ gibt, für das $a^2 = 3$ gilt. Diese Annahme führen wir zum Widerspruch, woraus folgt, dass die ursprüngliche Aussage richtig sein muss.

Da $a \in \mathbb{Q}$ gilt, lässt sich a als Bruch darstellen, d.h., $a = \frac{m}{n}$ für $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$. Wir können o.B.d.A. voraussetzen, dass der Bruch $\frac{m}{n}$ in vollständig gekürzter Form vorliegt. Aus $a^2 = 3$ und $a = \frac{m}{n}$ folgt $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 3$, woraus folgt:

$$m^2 = 3n^2.$$

Aufgabe XV-4 II

Folglich ist m^2 eine durch 3 teilbare Zahl. Dann ist folglich auch m eine durch 3 teilbare Zahl, d.h., $m = 3k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dies folgt aus der Eigenschaft, dass es sich bei 3 um eine Primzahl handelt.

Setzt man dies in $m^2 = 3n^2$ ein, so folgt $9k^2 = 3n^2$, woraus $n^2 = 3k^2$ folgt. Also ist n^2 eine durch 3 teilbare Zahl, woraus folgt, dass auch n durch 3 ist.

Demnach gilt $n = 3k'$ für ein $k' \in \mathbb{Z}$. Wir haben also $m = 3k$ und $n = 3k'$ gezeigt. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $\frac{m}{n}$ in vollständig gekürzter Form vorliegt.

Die Annahme $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ wurde zum Widerspruch geführt, womit die ursprüngliche Aussage $\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ bewiesen ist. $\square$

Aufgabe XV-5

Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$. Man multipliziert die Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ und addieren 1:

$$p = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1.$$

Die so entstandene Zahl p ist durch keine der Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ teilbar. Wegen $p > 1$ besitzt p also entweder einen Primfaktor, der nicht in $p_1, \ldots, p_n$ enthalten ist, oder ist selbst eine Primzahl. Beide Fälle stellen einen Widerspruch zur Annahme dar, dass $p_1, \ldots, p_n$ alle existierenden Primzahlen sind.

Dies beweist, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe XV-6 I

Beweis:

Mit vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass $A(n)$ nicht nur für bestimmte $n \in \mathbb{N}$, sondern für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(I) Induktionsanfang

$A(1)$ ist richtig, da $1^3 = \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4}$ gilt.

Aufgabe XV-6 II

(II) Induktionsschritt

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebig gewählte natürliche Zahl; wir setzen voraus, dass $A(n)$ für dieses n richtig ist, d.h., es gelte für dieses n:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2 \left(n+1\right)^2}{4} . \qquad (\star)$$

Wir haben zu zeigen, dass unter dieser Voraussetzung auch $A(n+1)$ richtig ist, d.h., wir müssen Folgendes nachweisen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{\left(n+1\right)^2 \left(n+2\right)^2}{4} .$$

Aufgabe XV-6 III

Dies ergibt sich durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 \\
&\overset{(\star)}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&\overset{\text{Zusammenfassen}}{=} \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&\overset{(n+1)^2 \text{ ausklammern}}{=} \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

Damit sind (I) und (II) gezeigt; nach dem Induktionsprinzip gilt $A(n)$ also für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Aufgabe XV-7 I

Beweis:

Mit vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass $A(n)$ nicht nur für bestimmte $n \in \mathbb{N}$, sondern für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(I) Induktionsanfang

$A(0)$ ist richtig, da $2 \cdot 0 + 1 = 1 = (0+1)^2$ gilt.

Aufgabe XV-7 II

(II) Induktionsschritt

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebig gewählte natürliche Zahl; wir setzen voraus, dass $A(n)$ für dieses n richtig ist, d.h., es gelte für dieses n:

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) \;=\; (n+1)^2 \,. \tag{$\star$}$$

Wir haben zu zeigen, dass unter dieser Voraussetzung auch $A(n+1)$ richtig ist, d.h., wir müssen Folgendes nachweisen:

$$\sum_{i=0}^{n+1} (2i+1) \;=\; (n+2)^2.$$

Aufgabe XV-7 III

Dies ergibt sich durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) &= \sum_{i=0}^{n}(2i+1)+(2n+3) \\
&\overset{(\star)}{=} (n+1)^2+(2n+3) \\
&= n^2+2n+1+2n+3 \\
&= n^2+4n+4 \\
&= (n+2)^2
\end{aligned}$$

Damit sind (I) und (II) gezeigt; nach dem Induktionsprinzip gilt $A(n)$ also für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Aufgabe XVI-1

a) Es ergibt sich:

$$a+b=\begin{pmatrix}9\\2\\16\end{pmatrix}$$

$$a-b=\begin{pmatrix}1\\-2\\30\end{pmatrix}$$

$$b-a=\begin{pmatrix}-1\\2\\-30\end{pmatrix}.$$

b) Es gilt $a \in \mathbb{R}^3$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Da nur Vektoren gleicher Dimension addiert/subtrahiert werden können, ist diese Aufgabe nicht lösbar.

Aufgabe XVI-2

Es ist

$$v = v_1 - v_2 + 3v_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt

$$|v| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{126} = 3 \cdot \sqrt{14}.$$

Aufgabe XVI-3

Zwei Vektoren sind genau dann senkrecht zueinander (orthogonal), wenn ihr Skalarprodukt gleich 0 ist. Es gilt

$$v_1 \cdot v_2 = 4 \cdot (-2) + (-2) \cdot 4 + 5 \cdot 0 = -16.$$

Die beiden Vektoren v_1 und v_2 sind also nicht senkrecht zueinander.

Aufgabe XVI-4

a) Es gilt

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 = 0 \\ a \cdot c &= 3 \cdot (-6) + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 = -22 \\ b \cdot c &= (-1) \cdot (-6) + 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

Es gilt also $a \perp b$ sowie $b \perp c$. a und c sind nicht orthogonal.

b) $c = a \times b$ ist senkrecht zu a und senkrecht zu b. c' ist der zu c gehörende normierte Vektor:

$$c = a \times b = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 16 \end{pmatrix} \qquad c' = \frac{1}{\sqrt{330}} \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe XVII-1

Aufstellen der Geradengleichung für die Gerade durch P_1 und P_2 ergibt

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 2.$$

Durch Umstellen ergibt sich die gesuchte Koordinatenform:

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 - 2 = 0.$$

Aufgabe XVII-2

Aufstellen der Geradengleichung für die Gerade durch P_1 und P_2 ergibt

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1.$$

Durch Umstellen ergibt sich die gesuchte Koordinatenform:

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 0.$$

Einsetzen von P_3 ergibt

$$-\frac{1}{2} \cdot 4 + 2,5 = 0,5 \neq 0.$$

P_3 liegt also nicht auf der Geraden. Folglich liegen P_1, P_2 und P_3 nicht auf derselben Geraden.

Aufgabe XVII-3

Als Parameterform ergibt sich sofort

$$x = \overrightarrow{0P_1} + t \cdot \left(P_2 - P_1\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Aus dem Richtungsvektor der Parameterdarstellung lässt sich der Normalenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ direkt ablesen.

Für die Normalenform ergibt sich folglich

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(x - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 0.$$

Aufgabe XVIII-1 a-b

$$\log\left(\frac{a}{2b}\right) = \log a - \log(2b)$$
$$= \log a - \log b - \log 2$$

$$\log\left(\frac{a}{b^2}\right) - \log\left(b^{-1}\right) + \log\left(\frac{a^2}{b^{-1}}\right) = \log a - 2\log b + \log b + 2\log a + \log b$$
$$= 3\log a$$

Aufgabe XVIII-1 c

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt[3]{a^2}\right) - \log a + 2\log\left(\frac{1}{7}a\right) &= \frac{2}{3}\log a - \log a + 2\left(\log\left(\frac{1}{7}\right) + \log a\right)\\ &= \frac{5}{3}\log a - 2\log 7\end{aligned}$$

Aufgabe XVIII-2

$$a^{-3}a^{3}a^{-1} = a^{-1}$$

$$\begin{aligned}\frac{(x^4z^3)^2}{x^6z^2} &= \frac{x^8z^6}{x^6z^2}\\ &= x^2z^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{7a^4b^{-6}}{49a^8b^{-3}} &= \frac{b^{-3}}{7a^4}\\ &= \frac{1}{7}a^{-4}b^{-3}\end{aligned}$$

Aufgabe XVIII-3

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{0,5}\right)^{x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x}$$

Setzt man $x = 6$ ein, erhält man:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}\cdot 6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$$

Analog erhält man für b) $x = -2$ sowie für c) $x = 4$.

Aufgabe XVIII-4

Eine Funktion ist periodisch, wenn sie sich auf dem gesamten Definitionsbereich in regelmäßigen Abständen wiederholt.

- Periode von $\sin x$: 2π
- Periode von $\cos 2x$: π
- Periode von $\sin \frac{1}{3}x$: 6π

Aufgabe XVIII-5

a) $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{73}}{8}$ sowie $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{73}}{8}$

b) keine Lösung

c) Durch Ausprobieren erhält man die erste Nullstelle $x_1 = 1$. Anschließende Polynomdivision und *pq*-Formel ergibt die restlichen Nullstellen: $x_2 = -1$ sowie $x_3 = -2$.

Aufgabe XVIII-6

Zunächst bestimmt man das Skalarprodukt von a und b und setzt dieses gleich 0.

$$0 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot x.$$

Umstellen nach x ergibt:

$$x = -\frac{2}{3}\ .$$

Für $x = -\frac{2}{3}$ sind die beiden Vektoren senkrecht zueinander.