

Vorkurs: Mathematik für Informatiker

Lösungen

Wintersemester 2019/20

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Dimitri Popov

popov@informatik.uni-hamburg.de

Florian Schneider

fschneider@informatik.uni-hamburg.de

Aufgabe I-1

Es seien $A = \{5, 7, 9\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ und $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ gegeben. Es gilt:

$$\text{a) } A \cup B = \{5, 6, 7, 9\}$$

$$A \cap C = \{5, 7, 9\} = A$$

$$C \setminus A = \{1, 3\}$$

$$A \Delta B = \{6, 9\}$$

$$\text{b) } A \cap B \cap C = \{5, 7\}$$

$$\text{c) } \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}, \{5, 6, 7\}\}$$

$$\text{d) } A \times B = \{(5, 5), (5, 6), (5, 7), (7, 5), (7, 6), (7, 7), (9, 5), (9, 6), (9, 7)\}$$

Aufgabe I-2

Es gilt:

$$\text{a) } \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$\text{b) } \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

Aufgabe III-1

$$\text{a) } \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\text{b) } \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{10}{12} = \frac{3}{24} - \frac{1}{24} + \frac{20}{24} = \frac{22}{24} = \frac{11}{12}$$

$$\text{c) } \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \frac{1}{20} - \frac{6}{20} = -\frac{5}{20} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{d) } \left(\frac{6}{7} : \frac{12}{10}\right) \cdot 2 + \frac{3}{-7} = \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{12} \cdot 2 + \frac{3}{-7} = \frac{10}{7} - \frac{3}{7} = 1$$

Aufgabe III-2

$$\text{a) } \frac{3}{2}x^2 \quad \text{b) } \frac{a}{4} \quad \text{c) } -\frac{1}{36} \quad \text{d) } \frac{5}{2}y$$

$$\text{e) } a^3 \quad \text{f) } -\frac{1}{a^4} \quad \text{g) } xy^2 \quad \text{h) } \frac{b^{10}c^3}{a^3}$$

Aufgabe III-3a

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{2a^2} - \frac{4ab-1}{4ab} + 2 &= \frac{3 \cdot 2b - (4ab-1) \cdot a + 2 \cdot 4a^2b}{4a^2b} \\
 &= \frac{6b - 4a^2b + a + 8a^2b}{4a^2b} \\
 &= \frac{4a^2b + 6b + a}{4a^2b}
 \end{aligned}$$

Aufgabe III-3b

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{x^2-xy} - \frac{y}{x^2+xy} - \frac{x}{x^2-y^2} &= \frac{x}{x(x-y)} - \frac{y}{x(x+y)} - \frac{x}{(x+y)(x-y)} \\
 &= \frac{x \cdot (x+y) - y \cdot (x-y) - x \cdot x}{x(x+y)(x-y)} \\
 &= \frac{x^2 + xy - xy + y^2 - x^2}{x(x+y)(x-y)} \\
 &= \frac{y^2}{x(x+y)(x-y)}
 \end{aligned}$$

Aufgabe III-3c-d

$$\begin{aligned} \frac{a-3b}{5a+1} \cdot \frac{25a^2-1}{a^2-6ab+9b^2} &= \frac{a-3b}{5a+1} \cdot \frac{(5a+1)(5a-1)}{(a-3b)^2} \\ &= \frac{5a-1}{a-3b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{5x} : \frac{4x^2-9}{10x^2} &= \frac{2x-3}{5x} \cdot \frac{10x^2}{(2x+3)(2x-3)} \\ &= \frac{2x}{2x+3} \end{aligned}$$

Aufgabe IV-1

- | | | |
|--------|-------|---------|
| a) 27 | b) 49 | c) -125 |
| d) -16 | e) 36 | f) -225 |

Aufgabe IV-2 a-b

$$\begin{aligned}
 7\sqrt{x} + \sqrt{2}\sqrt{8y} - \sqrt{16x} - 4\sqrt{y} &= 7\sqrt{x} - \sqrt{16x} + \sqrt{2 \cdot 8 \cdot y} - 4\sqrt{y} \\
 &= 7\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 4\sqrt{y} - 4\sqrt{y} \\
 &= 3\sqrt{x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{11}{60}} \cdot \sqrt{\frac{12}{55}} &= \sqrt{\frac{11 \cdot 12}{60 \cdot 55}} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 5}} \\
 &= \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

Aufgabe IV-2 c-d

$$\begin{aligned}
 \sqrt{0,1} \cdot \sqrt{0,121} &= \sqrt{0,0121} \\
 &= 0,11
 \end{aligned}$$

$$(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b}) = a^2 - b$$

Aufgabe IV-3 & IV-4

Aufgabe IV-3

- a) $r = 2$ b) $r = 5$
 c) $r = 1000$ d) $r = \frac{1}{16}$

Aufgabe IV-4

- a) $r = 3$ b) $r = -1$
 c) $r = 5 - 4 + 3 = 4$ d) $r = \frac{3}{2}$

Aufgabe IV-5

n entspricht 1600 Jahren. Es gilt

$$10g \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1,25g$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1,25g}{10g}$$

$$= \frac{1}{8}$$

Hieraus folgt direkt, dass $n = 3$ gilt. Es dauert also $3 \cdot 1600 = 4800$ Jahre, bis die 10g Radium 88 zu 1,25g zerfallen sind.

Aufgabe V-1, V-2 & V-3

Aufgabe V-1

- a) a^{11} b) $20x^7$
 c) $9z^9$ d) $-20x^6$

Aufgabe V-2

- a) a^{-x} b) x^{2-2b}
 c) $\frac{3}{y^2}$ d) $a^{-4}b^{5+y}$

Aufgabe V-3

- a) x^4 b) $x^{\frac{3}{5}}$ c) $a^{\frac{5}{28}}$

Aufgabe V-4 a-b

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a}{2b}\right) &= \log a - \log(2b) \\ &= \log a - \log b - \log 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(a^3) + \log(\sqrt{b}) - \log(ab^2) &= 3 \log a + \frac{1}{2} \log b - (\log a + 2 \log b) \\ &= 2 \log a - \frac{3}{2} \log b\end{aligned}$$

Aufgabe V-4 c-d

$$\begin{aligned} \log(\sqrt[3]{a^2}) - \log a + 2 \log\left(\frac{1}{7}a\right) &= \frac{2}{3} \log a - \log a + 2 \left(\log\left(\frac{1}{7}\right) + \log a \right) \\ &= \frac{5}{3} \log a - 2 \log 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{a^2 b^{-1} c}{a c^{-3} b}\right) &= \log(ab^{-2}c^4) \\ &= \log a - 2 \log b + 4 \log c \end{aligned}$$

Aufgabe V-4 e

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{a^2 c + ac}{ab} - \frac{c}{b}\right) &= \log\left(\frac{a^2 c + ac - ac}{ab}\right) \\ &= \log\left(\frac{a^2 c}{ab}\right) \\ &= \log(ab^{-1}c) \\ &= \log a - \log b + \log c \end{aligned}$$

Aufgabe VII-1

Die folgenden Operationen sind assoziativ:

- ▶ Addition
- ▶ Multiplikation

Die restlichen Operationen sind nicht assoziativ.

Aufgabe VII-2

Die folgenden Operationen sind kommutativ:

- ▶ Addition
- ▶ Multiplikation

Die restlichen Operationen sind nicht kommutativ.

Aufgabe VII-3

Für rationale Zahlen $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ und $r_3 = \frac{p_3}{q_3}$ gilt:

$$\begin{aligned}
 (r_1 + r_2) + r_3 &= \left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} \right) + \frac{p_3}{q_3} \\
 &= \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2} + \frac{p_3}{q_3} \\
 &= \frac{(p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3) + p_3 q_1 q_2}{q_1 q_2 q_3} \\
 &= \frac{p_1 q_2 q_3 + (p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2)}{q_1 q_2 q_3} \\
 &= \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2 q_3 + p_3 q_2}{q_2 q_3} \\
 &= \frac{p_1}{q_1} + \left(\frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3} \right) \\
 &= r_1 + (r_2 + r_3)
 \end{aligned}$$

Aufgabe XI-1

$$\sum_{1 \leq k \leq 4} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 10 \\ i: \text{gerade}}} a_i = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$$

$$\sum_{\substack{0 \leq j \leq 10 \\ j: \text{ungerade}}} 2^j = 2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9$$

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq 15 \\ j: \text{Primzahl}}} b_j = b_2 + b_3 + b_5 + b_7 + b_{11} + b_{13}$$

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq 50 \\ k: \text{Quadratzahl}}} a_k = a_1 + a_4 + a_9 + a_{16} + a_{25} + a_{36} + a_{49}$$

Aufgabe XI-2

- a) wahr
- b) falsch
- c) wahr
- d) falsch

Aufgabe XII-1 a-c

$$a(x) + b(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$$

$$a(x) - b(x) = x^3 + 2x^2 - 6x + 1$$

$$\begin{aligned} a(x) \cdot b(x) &= x^4 + 2x^3 + 2x^3 + 4x^2 - 5x^2 - 10x + 3x + 6 \\ &= x^4 + 4x^3 - x^2 - 7x + 6 \end{aligned}$$

Aufgabe XII-1 d

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 2x^2 - 5x + 3 : (x + 2) = x^2 - 5 \\
 - \underline{(x^3 + 2x^2)} \\
 - 5x + 3 \\
 - \underline{(-5x - 10)} \\
 13
 \end{array}$$

Es gilt

$$x^3 + 2x^2 - 5x + 3 = (x^2 - 5) \cdot (x + 2) + 13.$$

Aufgabe XIII-1

$$a) \quad x = \frac{5}{4} \quad y = \frac{15}{8}$$

$$b) \quad x = 1 \quad y = 3$$

$$c) \quad x = -1 \quad y = 2$$

Aufgabe XIII-2 a

Es ergibt sich das folgende Gleichungssystem ($p = \text{Paul}$; $v = \text{Vater}$):

$$\begin{aligned}p + v &= 33 \\ p + 30 &= \frac{1}{2}(v + 30).\end{aligned}$$

Umformen und Auflösen des Gleichungssystems ergibt

$$p = 1 \quad \text{und} \quad v = 32.$$

Aufgabe XIII-2 b

Es ergibt sich das folgende Gleichungssystem ($m_i = \text{Michael}$; $m_u = \text{Mutter}$):

$$\begin{aligned}m_i &= \frac{1}{2}m_u \\ m_i + 2 + m_u + 2 &= 100.\end{aligned}$$

Umformen und Auflösen des Gleichungssystems ergibt

$$m_i = 32 \quad \text{und} \quad m_u = 64.$$

Aufgabe XIII-3

- a) $x_1 = -4$ sowie $x_2 = 2$
- b) $x_1 = \sqrt{7}$ sowie $x_2 = -\sqrt{7}$
- c) $x_1 = 0$ sowie $x_2 = \frac{1}{3}$
- d) $x_1 = 0$ sowie $x_2 = 1$
- e) $x_1 = \frac{8+2\cdot\sqrt{163}}{49}$ sowie $x_2 = \frac{8-2\cdot\sqrt{163}}{49}$
- f) keine Lösung

Aufgabe XV-1

Es sei n eine ungerade ganze Zahl. Dann lässt sich n als $n = 2k + 1$ darstellen, wobei k eine ganze Zahl ist. Daraus folgt mithilfe der ersten binomischen Formel:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot \underbrace{(2k^2 + 2k)}_{\in \mathbb{Z}} + 1.$$

Aus dieser Darstellung folgt, dass n^2 ungerade ist. \square

Aufgabe XV-2

Man berechnet zunächst die doppelte Summe. Der erste und der letzte, der zweite und der vorletzte, der dritte und der vorvorletzte (usw.) Summand ergeben in der Summe stets $n + 1$:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (1 + 2 + \dots + (n-1) + n) &= (1 + n) + (2 + (n-1)) + \dots + (n + 1) \\ &= n \cdot (n + 1) \end{aligned}$$

Damit wir die einfache Summe erhalten, teilen wir diesen Ausdruck durch 2 und erhalten:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Diese Aufgabe (samt Lösung) ist auch als der „kleine Gauß“ bekannt.

Aufgabe XV-3

Es existieren (unter Zuhilfenahme des Hinweises) 1 Million verschiedene Möglichkeiten für die Anzahl an Haaren. Da Hamburg etwa 1,8 Millionen Einwohner hat, müssen nach dem Schubfachprinzip folglich mindestens 2 Personen dieselbe Anzahl an Haaren auf dem Kopf haben.

Aufgabe XV-4 I

Wir wollen annehmen, dass die Behauptung falsch ist, d.h., wir nehmen an, dass es ein $a \in \mathbb{Q}$ gibt, für das $a^2 = 3$ gilt. Diese Annahme führen wir zum Widerspruch, woraus folgt, dass die ursprüngliche Aussage richtig sein muss.

Da $a \in \mathbb{Q}$ gilt, lässt sich a als Bruch darstellen, d.h., $a = \frac{m}{n}$ für $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$. Wir können o.B.d.A. voraussetzen, dass der Bruch $\frac{m}{n}$ in vollständig gekürzter Form vorliegt. Aus $a^2 = 3$ und $a = \frac{m}{n}$ folgt $(\frac{m}{n})^2 = 3$, woraus folgt:

$$m^2 = 3n^2.$$

Aufgabe XV-4 II

Folglich ist m^2 eine durch 3 teilbare Zahl. Dann ist folglich auch m eine durch 3 teilbare Zahl, d.h., $m = 3k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dies folgt aus der Eigenschaft, dass es sich bei 3 um eine Primzahl handelt.

Setzt man dies in $m^2 = 3n^2$ ein, so folgt $9k^2 = 3n^2$, woraus $n^2 = 3k^2$ folgt. Also ist n^2 eine durch 3 teilbare Zahl, woraus folgt, dass auch n durch 3 ist.

Demnach gilt $n = 3k'$ für ein $k' \in \mathbb{Z}$. Wir haben also $m = 3k$ und $n = 3k'$ gezeigt. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $\frac{m}{n}$ in vollständig gekürzter Form vorliegt.

Die Annahme $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ wurde zum Widerspruch geführt, womit die ursprüngliche Aussage $\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ bewiesen ist. \square

Aufgabe XV-5

Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen p_1, \dots, p_n . Man multipliziert die Primzahlen p_1, \dots, p_n und addieren 1:

$$p = p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1.$$

Die so entstandene Zahl p ist durch keine der Primzahlen p_1, \dots, p_n teilbar. Wegen $p > 1$ besitzt p also entweder einen Primfaktor, der nicht in p_1, \dots, p_n enthalten ist, oder ist selbst eine Primzahl. Beide Fälle stellen einen Widerspruch zur Annahme dar, dass p_1, \dots, p_n alle existierenden Primzahlen sind.

Dies beweist, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe XV-6 I

Beweis:

Mit vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass $A(n)$ nicht nur für bestimmte $n \in \mathbb{N}$, sondern für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(I) Induktionsanfang

$$A(1) \text{ ist richtig, da } 1^3 = \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4} \text{ gilt.}$$

Aufgabe XV-6 II

(II) Induktionsschritt

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebig gewählte natürliche Zahl; wir setzen voraus, dass $A(n)$ für dieses n richtig ist, d.h., es gelte für dieses n :

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \quad (*)$$

Wir haben zu zeigen, dass unter dieser Voraussetzung auch $A(n+1)$ richtig ist, d.h., wir müssen Folgendes nachweisen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Aufgabe XV-6 III

Dies ergibt sich durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \sum_{i=1}^n i^3 + (n+1)^3 \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &\stackrel{\text{Zusammenfassen}}{=} \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &\stackrel{(n+1)^2 \text{ ausklammern}}{=} \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

Damit sind (I) und (II) gezeigt; nach dem Induktionsprinzip gilt $A(n)$ also für alle $n \in \mathbb{N}$. \square

Aufgabe XV-7 I

Beweis:

Mit vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass $A(n)$ nicht nur für bestimmte $n \in \mathbb{N}$, sondern für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(I) Induktionsanfang

$A(0)$ ist richtig, da $2 \cdot 0 + 1 = 1 = (0 + 1)^2$ gilt.

Aufgabe XV-7 II

(II) Induktionsschritt

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebig gewählte natürliche Zahl; wir setzen voraus, dass $A(n)$ für dieses n richtig ist, d.h., es gelte für dieses n :

$$\sum_{i=0}^n (2i + 1) = (n + 1)^2. \quad (*)$$

Wir haben zu zeigen, dass unter dieser Voraussetzung auch $A(n + 1)$ richtig ist, d.h., wir müssen Folgendes nachweisen:

$$\sum_{i=0}^{n+1} (2i + 1) = (n + 2)^2.$$

Aufgabe XV-7 III

Dies ergibt sich durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n+1} (2i+1) &= \sum_{i=0}^n (2i+1) + (2n+3) \\
 &\stackrel{(*)}{=} (n+1)^2 + (2n+3) \\
 &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\
 &= n^2 + 4n + 4 \\
 &= (n+2)^2
 \end{aligned}$$

Damit sind (I) und (II) gezeigt; nach dem Induktionsprinzip gilt $A(n)$ also für alle $n \in \mathbb{N}$. \square

Aufgabe XVI-1

a) Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 a + b &= \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix} \\
 a - b &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 30 \end{pmatrix} \\
 b - a &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

b) Es gilt $a \in \mathbb{R}^3$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Da nur Vektoren gleicher Dimension addiert/subtrahiert werden können, ist diese Aufgabe nicht lösbar.

Aufgabe XVI-2

Es ist

$$v = v_1 - v_2 + 3v_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt

$$|v| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{126} = 3 \cdot \sqrt{14}.$$

Aufgabe XVI-3

Zwei Vektoren sind genau dann senkrecht zueinander (orthogonal), wenn ihr Skalarprodukt gleich 0 ist. Es gilt

$$v_1 \cdot v_2 = 4 \cdot (-2) + (-2) \cdot 4 + 5 \cdot 0 = -16.$$

Die beiden Vektoren v_1 und v_2 sind also nicht senkrecht zueinander.

Aufgabe XVI-4

a) Es gilt

$$a \cdot b = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 = 0$$

$$a \cdot c = 3 \cdot (-6) + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 = -22$$

$$b \cdot c = (-1) \cdot (-6) + 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 0.$$

Es gilt also $a \perp b$ sowie $b \perp c$. a und c sind nicht orthogonal.

b) $c = a \times b$ ist senkrecht zu a und senkrecht zu b . c' ist der zu c gehörende normierte Vektor:

$$c = a \times b = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 16 \end{pmatrix} \quad c' = \frac{1}{\sqrt{330}} \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe XVII-1

Aufstellen der Geradengleichung für die Gerade durch P_1 und P_2 ergibt

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 2.$$

Durch Umstellen ergibt sich die gesuchte Koordinatenform:

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 - 2 = 0.$$

Aufgabe XVII-2

Aufstellen der Geradengleichung für die Gerade durch P_1 und P_2 ergibt

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1.$$

Durch Umstellen ergibt sich die gesuchte Koordinatenform:

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 0.$$

Einsetzen von P_3 ergibt

$$-\frac{1}{2} \cdot 4 + 2,5 = 0,5 \neq 0.$$

P_3 liegt also nicht auf der Geraden. Folglich liegen P_1 , P_2 und P_3 nicht auf derselben Geraden.

Aufgabe XVII-3

Als Parameterform ergibt sich sofort

$$x = \overrightarrow{0P_1} + t \cdot (P_2 - P_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Aus dem Richtungsvektor der Parameterdarstellung lässt sich der Normalenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ direkt ablesen.

Für die Normalenform ergibt sich folglich

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(x - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Aufgabe XVIII-1 a-b

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a}{2b}\right) &= \log a - \log(2b) \\ &= \log a - \log b - \log 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a}{b^2}\right) - \log(b^{-1}) + \log\left(\frac{a^2}{b^{-1}}\right) &= \log a - 2\log b + \log b + 2\log a + \log b \\ &= 3\log a\end{aligned}$$

Aufgabe XVIII-1 c

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt[3]{a^2}\right) - \log a + 2\log\left(\frac{1}{7}a\right) &= \frac{2}{3}\log a - \log a + 2\left(\log\left(\frac{1}{7}\right) + \log a\right) \\ &= \frac{5}{3}\log a - 2\log 7\end{aligned}$$

Aufgabe XVIII-2

$$a^{-3}a^3a^{-1} = a^{-1}$$

$$\begin{aligned}\frac{(x^4z^3)^2}{x^6z^2} &= \frac{x^8z^6}{x^6z^2} \\ &= x^2z^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{7a^4b^{-6}}{49a^8b^{-3}} &= \frac{b^{-3}}{7a^4} \\ &= \frac{1}{7}a^{-4}b^{-3}\end{aligned}$$

Aufgabe XVIII-3

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{0,5}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x}$$

Setzt man $x = 6$ ein, erhält man:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2} \cdot 6} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Analog erhält man für b) $x = -2$ sowie für c) $x = 4$.

Aufgabe XVIII-4

Eine Funktion ist periodisch, wenn sie sich auf dem gesamten Definitionsbereich in regelmäßigen Abständen wiederholt.

- ▶ Periode von $\sin x$: 2π
- ▶ Periode von $\cos 2x$: π
- ▶ Periode von $\sin \frac{1}{3}x$: 6π

Aufgabe XVIII-5

a) $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{73}}{8}$ sowie $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{73}}{8}$

b) keine Lösung

c) Durch Ausprobieren erhält man die erste Nullstelle $x_1 = 1$.
Anschließende Polynomdivision und pq -Formel ergibt die restlichen Nullstellen: $x_2 = -1$ sowie $x_3 = -2$.

Aufgabe XVIII-6

Zunächst bestimmt man das Skalarprodukt von a und b und setzt dieses gleich 0.

$$0 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot x.$$

Umstellen nach x ergibt:

$$x = -\frac{2}{3}.$$

Für $x = -\frac{2}{3}$ sind die beiden Vektoren senkrecht zueinander.