Vorkurs: Mathematik für Informatiker

Teil 2

Wintersemester 2019/20

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Dimitri Popov
popov@informatik.uni-hamburg.de

Florian Schneider
fschneider@informatik.uni-hamburg.de

 © 2019 Steven Köhler

Inhaltsverzeichnis

- Teil 1
- Teil 2
  - Intervalle
  - Verknüpfungen und deren Eigenschaften
  - Binomische Formeln
  - Potenz-, Wurzel-, Exponential- & Logarithmusfunktionen
  - Trigonometrische Funktionen
  - Das Summenzeichen
- Teil 3
- Teil 4

 © 2019 Steven Köhler

Kapitel VI: Intervalle

 © 2019 Steven Köhler

Intervalle der reellen Zahlen I

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \left\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\right\} \\
(a,b) &:= \left\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\right\} \\
(a,b] &:= \left\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\right\} \\
[a,b) &:= \left\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\right\}
\end{aligned}$$

$[a,b]$ heißt *abgeschlossenes* (oder *kompaktes*) *Intervall*;
(a,b) heißt *offenes Intervall*;
$(a,b]$ und $[a,b)$ sind *halboffene Intervalle*.

Länge eines Intervalls:

$$\left|[a,b]\right| = \left|(a,b)\right| = \left|(a,b]\right| = \left|[a,b)\right| = b - a$$

Intervalle der reellen Zahlen II

Uneigentliche Intervalle:

$$\begin{aligned}
[a,\infty) &:= \left\{x \in \mathbb{R} : a \leq x\right\} \\
(a,\infty) &:= \left\{x \in \mathbb{R} : a < x\right\} \\
(-\infty,b] &:= \left\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\right\} \\
(-\infty,b) &:= \left\{x \in \mathbb{R} : x < b\right\}
\end{aligned}$$

Kapitel VII: Verknüpfungen und deren Eigenschaften

Verknüpfungen

Eine *innere zweistellige Verknüpfung* auf der Menge A ist eine zweistellige Abbildung $\star : A \times A \to A$, die jedem Element des kartesischen Produkts $A \times A$ ein Element der Menge A zuordnet. Die Menge A ist bezüglich der Verknüpfung $\star$ abgeschlossen.

Die Bezeichnung innere zweistellige Verknüpfung rührt daher, dass die Verknüpfung $\star$ vollständig innerhalb der Menge A stattfindet: Es werden zwei Elemente der Menge A zu einem Element derselben Menge A verknüpft.

Assoziativgesetz I

Aus dem Lateinischen: associare - vereinigen, verbinden, verknüpfen, vernetzen.

Eine *zweistellige* (oder *binäre*) *Verknüpfung* ist *assoziativ*, wenn die Reihenfolge der Ausführung keine Rolle spielt. Anders gesagt: Die Klammerung mehrerer (gleichartiger) assoziativer Verknüpfungen ist beliebig.

Assoziativgesetz II

In einem Summen- oder Produktterm dürfen die Summanden bzw. Faktoren beliebig geklammert werden. Dies gilt auch für mehr als drei Summanden bzw. Faktoren.

Eine binäre Verknüpfung $\star$ auf einer Menge A heißt *assoziativ*, wenn für alle $a, b, c \in A$ das *Assoziativgesetz* gilt:

$$a \star \left(b \star c\right) = \left(a \star b\right) \star c.$$

Assoziativgesetz III

Die Verknüpfung von fünf Elementen a, b, c, d und e kann beispielsweise bereits auf 14 Arten geklammert werden:

$$
\begin{array}{lll}
a \star \big(b \star (c \star (d \star e))\big) & (a \star b) \star (c \star (d \star e)) & \big((a \star (b \star c)) \star d\big) \star e \\
a \star \big(b \star ((c \star d) \star e)\big) & (a \star b) \star ((c \star d) \star e) & \big((a \star b) \star (c \star d)\big) \star e \\
a \star \big((b \star (c \star d)) \star e\big) & ((a \star b) \star c) \star (d \star e) & \big(a \star ((b \star c) \star d)\big) \star e \\
a \star \big((b \star c) \star (d \star e)\big) & (a \star (b \star c)) \star (d \star e) & \big(a \star (b \star (c \star d))\big) \star e \\
a \star \big(((b \star c) \star d) \star e\big) & \big(((a \star b) \star c) \star d\big) \star e &
\end{array}
$$

Assoziativgesetz IV

Aufgrund des Assoziativgesetzes ist es möglich, eine *klammerfreie Notation* einzuführen:

$$a \star \big(b \star c\big) = a \star b \star c.$$

Assoziativgesetz V

Aufgabe VII-1

Welche der folgenden Operationen sind assoziativ? Begründe deine Antworten.

- Addition
- Subtraktion
- Multiplikation
- Division
- Potenzieren

Kommutativgesetz I

Aus dem Lateinischen: commutare - vertauschen.

Wenn das *Kommutativgesetz* gilt, können die Argumente einer Operation vertauscht werden, ohne dass sich das Ergebnis verändert.

Eine binäre Verknüpfung $\star$ auf einer Menge A heißt *kommutativ* (oder *abelsch*), wenn für alle $a, b \in A$ das *Kommutativgesetz* gilt:

$$a \star b = b \star a.$$

Kommutativgesetz II

Aufgabe VII-2

Welche der folgenden Operationen sind kommutativ? Begründe deine Antworten.

- Addition
- Subtraktion
- Multiplikation
- Division
- Potenzieren

Distributivgesetz I

Aus dem Lateinischen: distribuere - verteilen.

Distributivgesetze sind mathematische Regeln, die angeben, wie sich zwei binäre Verknüpfungen bei der Auflösung von Klammern verhalten.

Typische Anwendungen der Distributivgesetze sind das *Ausmultiplizieren* sowie das *Ausklammern*.

Distributivgesetz II

Als Beispiel kann die Verknüpfung der binären Operationen $\star$ und $\circ$ dienen. Man unterscheidet zwischen *links-* und *rechtsdistributiven* Verknüpfungen:

$$a \star \left(b \circ c\right) = \left(a \star b\right) \circ \left(a \star c\right) \qquad \text{(linksdistributiv)}$$

$$\left(b \circ c\right) \star a = \left(b \star a\right) \circ \left(c \star a\right) \qquad \text{(rechtsdistributiv)}$$

Distributivgesetz III

Frage:

Warum unterscheidet man zwischen Links- und Rechtsdistributivität?

Antwort:

Da nicht alle Operationen kommutativ sind, dürfen die Operanden nicht immer vertauscht werden, weswegen man beide Varianten des Distributivgesetzes eingeführt hat.

Aufgaben

Aufgabe VII-3

Es sei als bekannt vorausgesetzt, dass sowohl die Addition als auch die Multiplikation von ganzen Zahlen assoziativ und kommutativ ist. Zeige, dass dann auch die Addition von rationalen Zahlen assoziativ ist.

© 2019 Steven Köhler

Kapitel VIII: Binomische Formeln

© 2019 Steven Köhler

Binomische Formeln I

Das Adjektiv *binomisch* leitet sich von bi (zwei) und Nomen (Namen) ab. Im Gegensatz zu einigen wenigen Adjektiven wie abelsch leitet es sich nicht von einem Mathematiker-Namen ab.

Im Sinne des mathematischen Humors wird die Bezeichnung binomisch scherzhaft auf die fiktiven Personen Alessandro und Francesco Binomi zurückgeführt, die auch in einigen Schul- und Lehrbüchern als deren Urheber auftauchen.

Binomische Formeln II

1. binomische Formel:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. binomische Formel:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. binomische Formel:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Binomischer Lehrsatz

Als Verallgemeinerung der ersten beiden binomischen Formeln ergibt sich der sogenannte *binomische Lehrsatz*:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} a^n b^0.\end{aligned}$$

Binomialkoeffizienten

Die Elemente $\binom{n}{k}$ werden *Binomialkoeffizienten* genannt. Es gilt:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad \text{bzw.} \qquad \binom{n}{k} := \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Der Wert $\binom{n}{k}$ beschreibt den Eintrag in der n-ten Zeile und k-ten Spalte des *Pascalschen Dreiecks*.

Pascalsches Dreieck I

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Pascalsches Dreieck II

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & \\
8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Kapitel IX: Potenz-, Wurzel-, Exponential- & Logarithmusfunktionen

Definition I

Eine *Funktion* (oder *Abbildung*) $f : A \to B$ stellt eine *Abbildungsvorschrift* dar, die jedem Element der Menge A ein Element der Menge B zuordnet.

Eine Funktion kann formal wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto f(a). \end{aligned}$$

Definition II

Bezeichnungen:

- A: *Definitionsbereich*, *Urbildmenge*
- B: *Bildmenge*, *Bildbereich*
- $A \to B$: *Signatur*
- $a \mapsto f(a)$: *Funktionsvorschrift*, *Abbildungsvorschrift*
- *Wertebereich*: $W_f := f(A) = \left\{ f(a) : a \in A \right\}$.
  Nicht alle Elemente der Bildmenge müssen ein Urbild haben.
  Es gilt $f(A) \subseteq B$.

Definition III

Beispiel:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

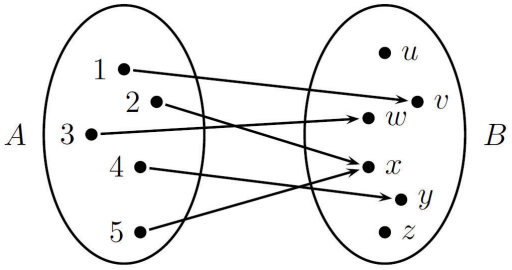
Definitions- und Wertebereich der Funktion f:

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}; \\ W_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Für dieses Beispiel gilt also $W_f \subset \mathbb{R}$.

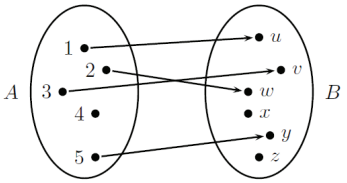
Definition IV

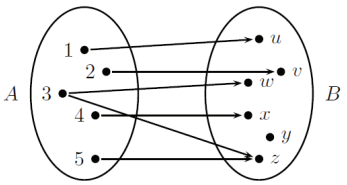
Grafisch lässt sich eine Abbildung wie folgt veranschaulichen:



Definition V

Bei den nachfolgenden Beispielen handelt es sich *nicht* um Abbildungen:





Verkettung von Funktionen

Es sei $h : A \to C$ eine *Komposition* (oder *Verkettung*) der Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$.

$$h = g \circ f$$
$$h(x) = g\Big(f(x)\Big)$$

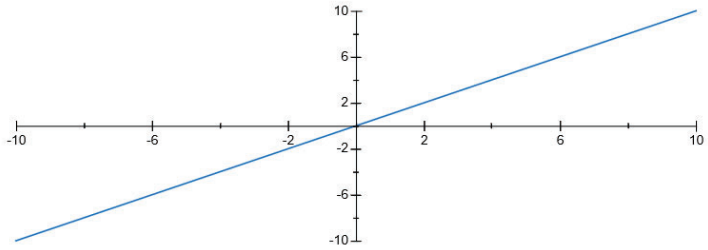
Statt Komposition kann man auch *Nacheinanderausführung* sagen. $g \circ f$ bedeutet also „g wird nach f ausgeführt“.

Potenzfunktionen I

Potenzfunktionen sind spezielle Funktionen der folgenden Form:

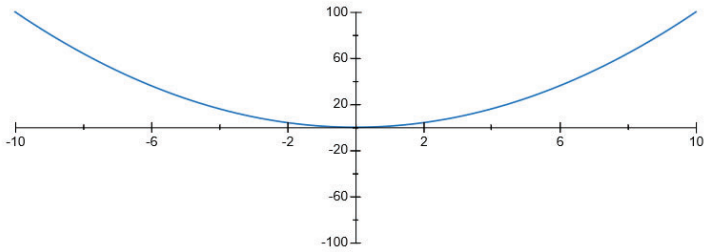
$$f(x) = a \cdot x^r \qquad (a \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{N}).$$

Potenzfunktionen II



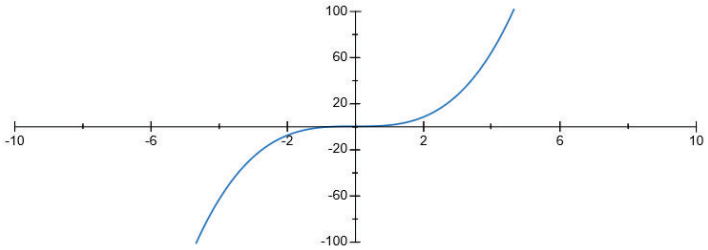
Graph der Potenzfunktion x

Potenzfunktionen III



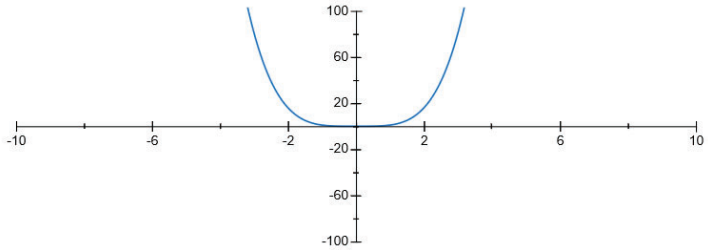
Graph der Potenzfunktion x^2

Potenzfunktionen IV



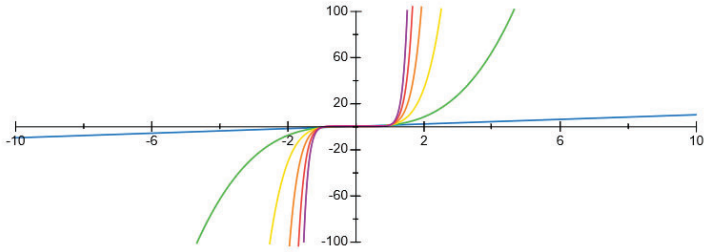
Graph der Potenzfunktion x^3

Potenzfunktionen V



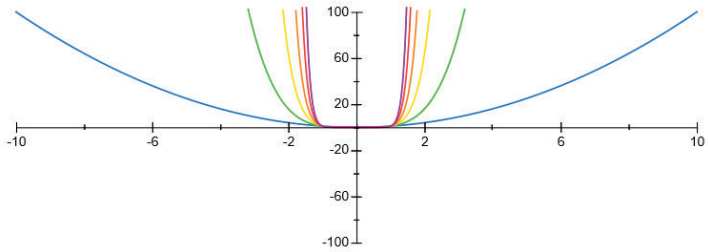
Graph der Potenzfunktion x^4

Potenzfunktionen VI



Graphen der ungeraden Potenzfunktionen x bis x^{11}

Potenzfunktionen VII

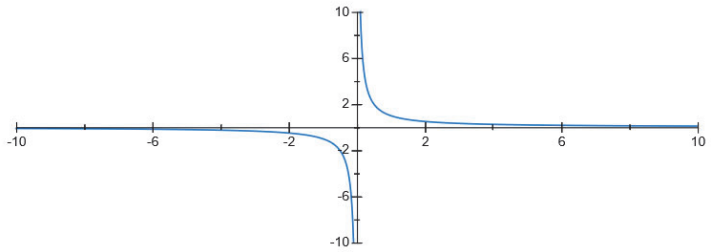


Graphen der geraden Potenzfunktionen x^2 bis x^{12}

Potenzfunktionen VIII

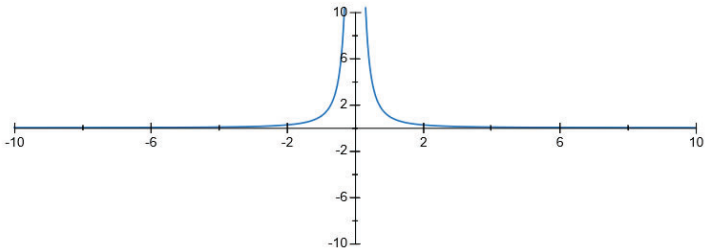
	gerade Potenzen	**ungerade Potenzen**
Defionitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$
Wertebereich	$0 \leq x^n < \infty$	$-\infty < x^n < \infty$
Periodizität	keine	keine
Monotonie	streng monoton fallend für $x < 0$ streng monoton steigend für $x > 0$	streng monoton steigend
Krümmung	streng konvex	streng konkav für $x < 0$ streng konvex für $x > 0$
Symmetrien	achsensymmetrisch zur y-Achse	punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung
Asymptote	keine	keine
Nullstellen	$x_0 = 0$	$x_0 = 0$
Sprungstellen	keine	keine
Polstellen	keine	keine
Extrema	Minimum bei $x = 0$	keine
Wendepunkte	keine	Wendepunkt bei $x = 0$

Hyperbeln I



Graph der Hyperbel $\frac{1}{x}$

Hyperbeln II



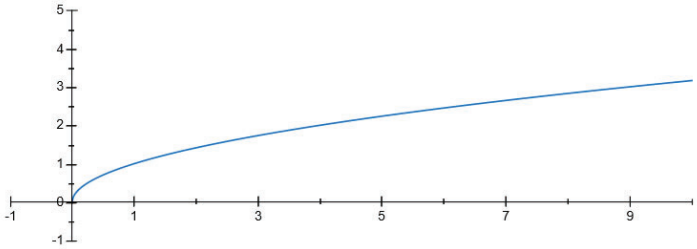
Graph der Hyperbel $\frac{1}{x^2}$

Wurzelfunktionen I

Wurzelfunktionen sind Funktionen vom Typ $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (für gerade Wurzeln) bzw. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (für ungerade Wurzeln) und besitzen die folgende Form:

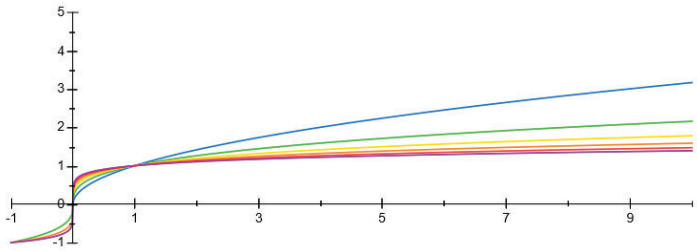
$$f(x) = c \cdot \sqrt[a]{x} \qquad (a \in \mathbb{N},\ a \neq 1,\ c \in \mathbb{R}).$$

Wurzelfunktionen II



Graph der Wurzelfunktion $\sqrt{x}$

Wurzelfunktionen III

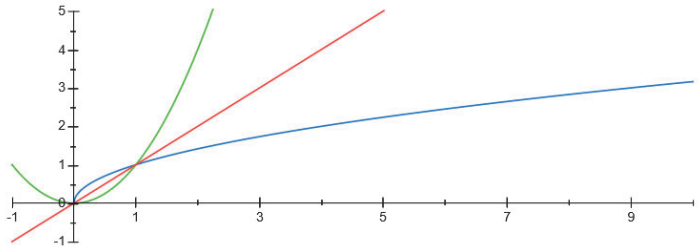


Graphen der Wurzelfunktion $\sqrt{x}$ bis $\sqrt[7]{x}$

Wurzelfunktionen IV

	gerade Wurzeln	ungerade Wurzeln
Defionitionsbereich	$0 \leq x < \infty$	$-\infty < x < \infty$
Wertebereich	$0 \leq \sqrt[n]{x} < \infty$	$-\infty < \sqrt[n]{x} < \infty$
Periodizität	keine	keine
Monotonie	streng monoton steigend	streng monoton steigend
Krümmung	streng konkav	streng konvex für $x < 0$ streng konkav für $x > 0$
Symmetrien	keine	punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung
Asymptote	keine	keine
Nullstellen	$x_0 = 0$	$x_0 = 0$
Sprungstellen	keine	keine
Polstellen	keine	keine
Extrema	keine	keine
Wendepunkte	keine	Wendepunkt bei $x = 0$

Wurzelfunktionen V



Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen – hier am Beispiel von $\sqrt{x}$ (blau) und x^2 (grün)

Exponentialfunktionen I

Exponentialfunktionen sind Funktionen vom Typ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und besitzen die folgende Form:

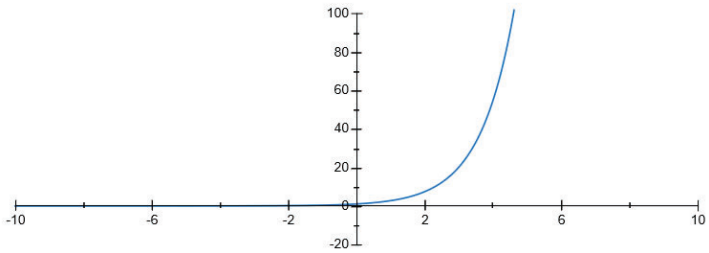
$$f(x) = c \cdot a^x \qquad (a \in \mathbb{R}^+,\ c \in \mathbb{R}).$$

Im Gegensatz zu Potenzfunktionen steht die Variable x bei Exponentialfunktionen nicht in der *Basis*, sondern im *Exponenten*.

Für alle Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ gilt:

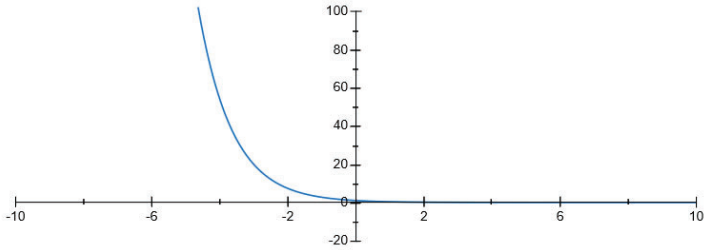
$$f(0) = 1.$$

Exponentialfunktionen II



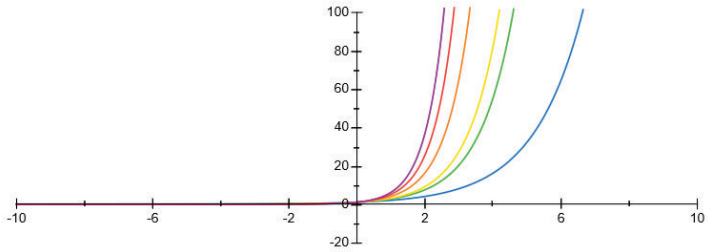
Graph der Exponentialfunktion e^x

Exponentialfunktionen III



Graph der Exponentialfunktion $\left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$

Exponentialfunktionen IV



Graphen der Exponentialfunktionen 2^x bis 6^x sowie e^x

Exponentialfunktionen V

Defionitionsbereich	$-\infty < x < \infty$
Wertebereich	$0 < a^x < \infty$
Periodizität	keine
Monotonie	streng monoton steigend für $a > 1$ streng monoton fallend für $0 < a < 1$
Krümmung	streng konvex
Symmetrien	keine
Asymptote	x-Achse als waagerechte Asymptote
Nullstellen	keine
Sprungstellen	keine
Polstellen	keine
Extrema	keine
Wendepunkte	keine

Exponentialfunktionen VI

Aufgrund der Regeln für das Rechnen mit Potenzen besitzen Exponentialfunktionen ein enormes Wachstum.

$$a^{(m+n)} = a^m \cdot a^n$$

Eine Exponentialfunktion a^x (mit $a > 1$) *wächst viel schneller* als jede Potenzfunktion x^n.

Logarithmusfunktionen I

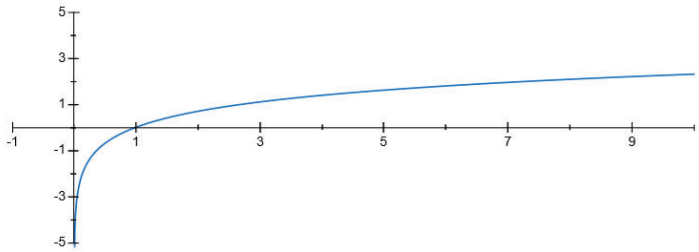
Logarithmusfunktionen sind Funktionen vom Typ $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und besitzen die folgende Form:

$$f(x) = c \cdot \log_a x \qquad (a \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1,\ c \in \mathbb{R}).$$

Für alle Logarithmusfunktionen f gilt:

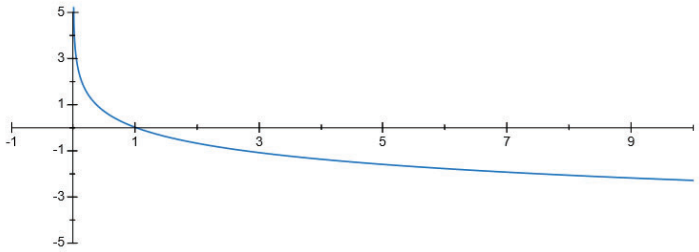
$$f(1) = 0.$$

Logarithmusfunktionen II



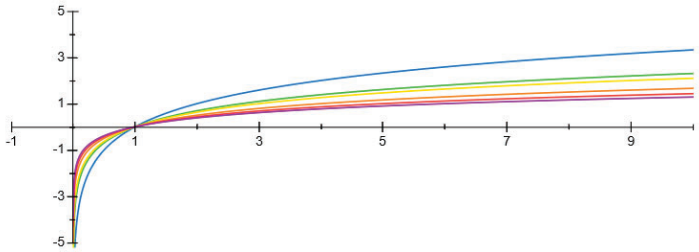
Graph der Logarithmusfunktion $\ln x$

Logarithmusfunktionen III



Graph der Logarithmusfunktion $\log_{\frac{1}{e}} x = -\ln x$

Logarithmusfunktionen IV

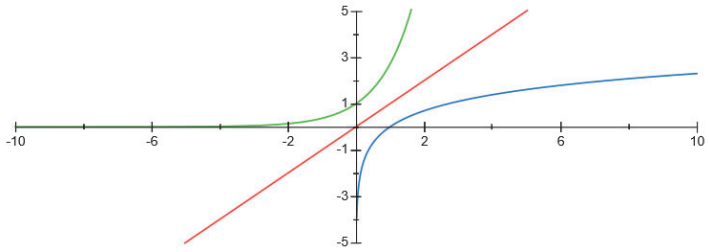


Graphen der Logarithmusfunktionen $\log_2 x$ bis $\log_6 x$ sowie $\ln x$

Logarithmusfunktionen V

Defionitionsbereich	$0 < x < \infty$
Wertebereich	$-\infty < \log_a x < \infty$
Periodizität	keine
Monotonie	streng monoton steigend für $a > 1$ streng monoton fallend für $0 < a < 1$
Krümmung	streng konkav für $a > 1$ streng konvex für $0 < a < 1$
Symmetrien	keine
Asymptote	senkrechte Asymptote bei $x_0 = 0$
Nullstellen	$x_0 = 1$
Sprungstellen	keine
Polstellen	keine
Extrema	keine
Wendepunkte	keine

Logarithmusfunktionen VI



Logarithmusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen – hier am Beispiel von $\ln x$ (blau) und e^x (grün)

Kapitel X: Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen I

Im Folgenden wollen wir uns mit den *trigonometrischen Funktionen* beschäftigen. Dabei wollen wir uns auf reellwertige Funktionen beschränken.

Im Wesentlichen werden wir uns mit der *Sinus*-, *Cosinus*-, *Tangens*- und *Cotangensfunktion* beschäftigen und ihre Bedeutungen geometrisch veranschaulichen.

Trigonometrische Funktionen II

Zunächst einmal die Definitionen der *Sinus*- und *Cosinusfunktion*:

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$$

Trigonometrische Funktionen III

Und die Definitionen der *Tangens*- und *Cotangensfunktion*:

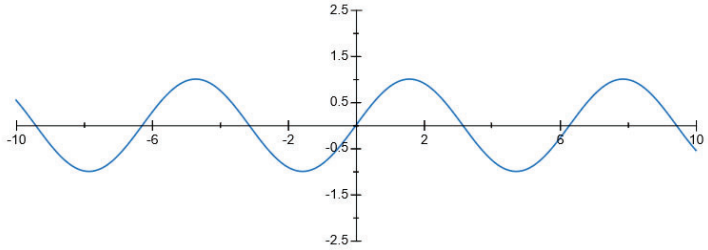
$$\begin{aligned} \tan : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cot(x) \end{aligned}$$

Es gilt

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{und} \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} \,.$$

Trigonometrische Funktionen IV

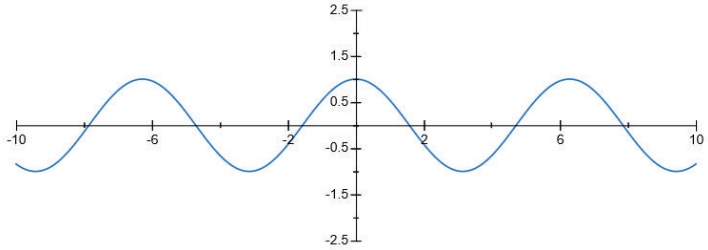


Graph der Sinusfunktion $\sin x$

Trigonometrische Funktionen V

Defionitionsbereich	$-\infty < x < \infty$
Wertebereich	$-1 \leq \sin(x) \leq 1$
Periodizität	Periodisch mit Periodenlänge 2π; $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
Monotonie	streng monoton steigend für $2n \cdot \pi \leq x \leq \left(2n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$; streng monoton fallend für $\left(2n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi \leq x \leq \left(2n + \frac{3}{2}\right) \cdot \pi$; streng monoton steigend für $\left(2n + \frac{3}{2}\right) \cdot \pi \leq x \leq (2n + 2) \cdot \pi$
Krümmung	streng konkav für $2n \cdot \pi \leq x \leq (2n + 1) \cdot \pi$; streng konvex für $(2n + 1) \cdot \pi \leq x \leq (2n + 2) \cdot \pi$
Symmetrien	Punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung; ungerade Funktion
Asymptote	keine
Nullstellen	$x = n \cdot \pi$
Sprungstellen	keine
Polstellen	keine
Extrema	Minimum bei $x = \left(2n + \frac{3}{2}\right) \cdot \pi$; Maximum bei $x = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$
Wendepunkte	$x_1 = 2n \cdot \pi$, $x_2 = (2n + 1) \cdot \pi$

Trigonometrische Funktionen VI

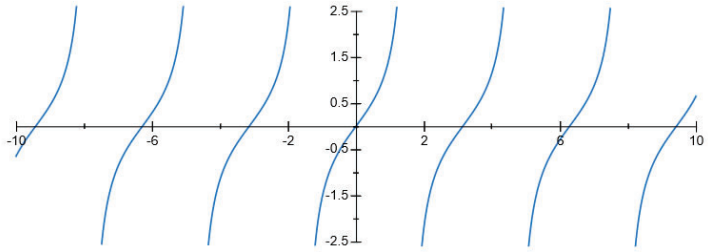


Graph der Cosinusfunktion $\cos x$

Trigonometrische Funktionen VII

Defionitionsbereich	$-\infty < x < \infty$
Wertebereich	$-1 \leq \cos(x) \leq 1$
Periodizität	Periodisch mit Periodenlänge 2π; $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
Monotonie	streng monoton fallend für $2n \cdot \pi \leq x \leq (2n+1) \cdot \pi$; streng monoton steigend für $(2n+1) \cdot \pi \leq x \leq (2n+2) \cdot \pi$
Krümmung	streng konkav für $2n \cdot \pi \leq x \leq \left(2n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$; streng konvex für $\left(2n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi \leq x \leq \left(2n + \frac{3}{2}\right) \cdot \pi$; streng konkav für $\left(2n + \frac{3}{2}\right) \cdot \pi \leq x \leq (2n+2) \cdot \pi$
Symmetrien	Achsensymmetrisch zur Ordinate; gerade Funktion
Asymptote	keine
Nullstellen	$x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$
Sprungstellen	keine
Polstellen	keine
Extrema	Maximum bei $x = 2n \cdot \pi$; Minimum bei $x = (2n+1) \cdot \pi$
Wendepunkte	$x_1 = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$, $x_2 = \left(2n + \frac{3}{2}\right) \cdot \pi$

Trigonometrische Funktionen VIII

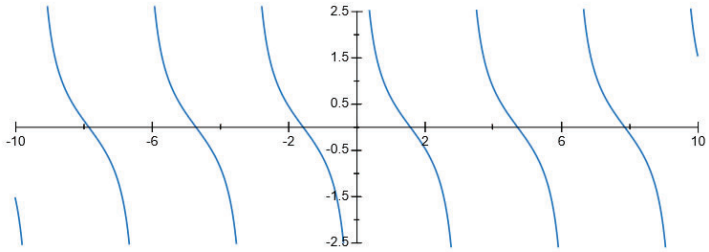


Graph der Tangensfunktion $\tan x$

Trigonometrische Funktionen IX

Defionitionsbereich	$\mathbb{R} \setminus \left\{ k \cdot \pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
Wertebereich	$\mathbb{R}$
Periodizität	Periodisch mit Periodenlänge π; $\tan(x+\pi) = \tan(x)$
Monotonie	streng monoton steigend in allen Intervallen
Krümmung	streng konkav für $x \in \left(k \cdot \pi - \frac{\pi}{2},\ k \cdot \pi\right]$; streng konvex für $x \in \left[k \cdot \pi,\ k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right)$
Symmetrien	Punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung; ungerade Funktion
Asymptote	Senkrechte Asymptoten bei den Polstellen
Nullstellen	$x = k \cdot \pi$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)
Sprungstellen	keine
Polstellen	$x = k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)
Extrema	keine
Wendepunkte	$x = k \cdot \pi$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)

Trigonometrische Funktionen X

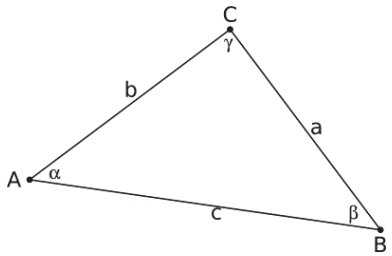


Graph der Cotangensfunktion $\cot x$

Trigonometrische Funktionen XI

Defionitionsbereich	$\mathbb{R} \setminus \left\{ k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
Wertebereich	$\mathbb{R}$
Periodizität	Periodisch mit Periodenlänge π; $\cot(x+\pi) = \cot(x)$
Monotonie	streng monoton fallend in allen Intervallen
Krümmung	streng konvex für $x \in \left(k \cdot \pi,\ k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right]$; streng konkav für $x \in \left[k \cdot \pi + \frac{\pi}{2},\ (k+1) \cdot \pi\right)$
Symmetrien	Punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung; ungerade Funktion
Asymptote	Senkrechte Asymptoten bei den Polstellen
Nullstellen	$x = k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)
Sprungstellen	keine
Polstellen	$x = k \cdot \pi$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)
Extrema	keine
Wendepunkte	$x = k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)

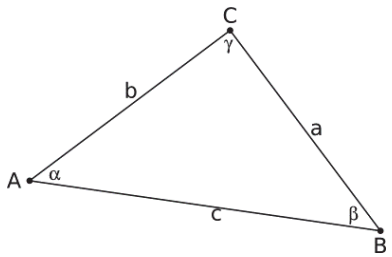
Geometrische Interpretation I



Im rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) gelten die folgenden Bezeichnungen (bezogen auf den Winkel α):

- a: *Gegenkathete*
- b: *Ankathete*
- c: *Hypotenuse*

Geometrische Interpretation II

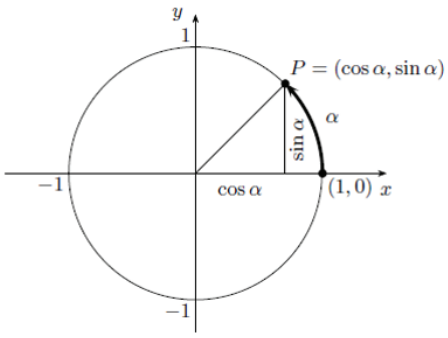


Im rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) gilt:

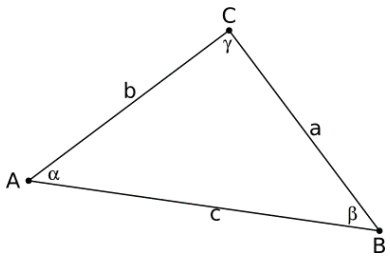
$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{\text{Gegenkathete des Winkels } \alpha}{\text{Hypotenuse}} &&= \frac{a}{c} \\
\cos\alpha &= \frac{\text{Ankathete des Winkels } \alpha}{\text{Hypotenuse}} &&= \frac{b}{c} \\
\tan\alpha &= \frac{\text{Gegenkathete des Winkels } \alpha}{\text{Ankathete des Winkels } \alpha} &&= \frac{a}{b} \\
\cot\alpha &= \frac{\text{Ankathete des Winkels } \alpha}{\text{Gegenkathete des Winkels } \alpha} &&= \frac{b}{a}
\end{aligned}$$

Geometrische Interpretation III

Interpretation am *Einheitskreis*:



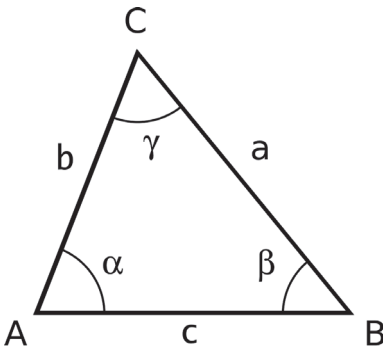
Satz des Pythagoras



Im rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) gilt (*Satz des Pythagoras*):

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Kosinussatz



Für die drei Seiten a, b und c eines Dreiecks sowie für den der Seite c gegenüberliegenden Winkel γ gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma).$$

Sinus & Cosinus im Detail I

Wir wollen uns die Sinusfunktion etwas genauer ansehen.

$$f(x) = \alpha \cdot \sin\left(k \cdot x + \omega\right) + c$$

Bezeichnungen:

- α: die *Amplitude*
- k: der *Streckungs-/Stauchungsfaktor*
- $\varphi = \frac{\omega}{k}$: die *Phasenverschiebung*
- $\frac{2\pi}{k}$: *Periodenlänge*

Dieselben Aussagen treffen analog auf die Cosinusfunktion zu.

Sinus & Cosinus im Detail II

Jede Sinusfunktion lässt sich auch durch eine Cosinusfunktion darstellen (und umgekehrt), da diese lediglich in der Phase verschoben sind:

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Sinus & Cosinus im Detail III

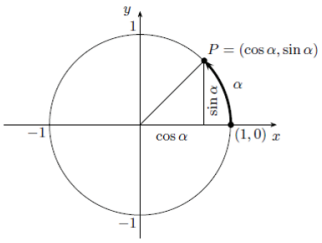
Einige wichtige Funktionswerte:

Winkel α (Grad)	0	30	45	60	90	180	270	360
Winkel α (Bogenmaß)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Aufgabe

Aufgabe

Die Berechnung von Sinus- und Cosinuswerten ist oft nur näherungsweise möglich. In einigen Fällen können die Werte jedoch auch exakt bestimmt werden. Führe dies exemplarisch für den Wert $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ durch.



Aufgabe

Lösung

Es gilt $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Anwenden des Satzes von Pythagoras ergibt:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Wegen $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ folgt

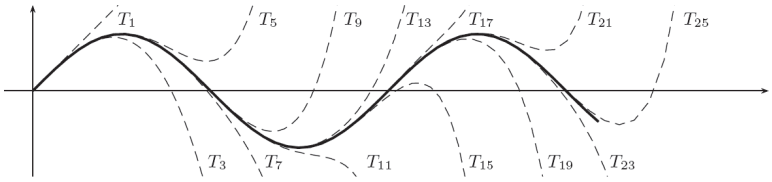
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Umstellen nach $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ liefert die gesuchte Lösung:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Sinus & Cosinus im Detail IV

Die Funktionswerte für einen beliebigen Winkel α können beispielsweise über *Taylorpolynome* näherungsweise berechnet werden; diese werden im Studium behandelt.



Taylorpolynome T_1 bis T_{25} für $\sin x$

Rechenregeln I

Für die Addition von (verschiedenen) Winkeln gelten die folgenden *Additionstheoreme*:

$$\sin\left(\alpha \pm \beta\right) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos\left(\alpha \pm \beta\right) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

Daraus ergeben sich beispielsweise die Rechenregeln für den doppelten Winkel:

$$\sin\left(2\alpha\right) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos\left(2\alpha\right) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Rechenregeln II

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist die folgende:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Sie lässt sich einfach am Einheitskreis beweisen. (Aufgabe!)

Umkehrfunktionen

Zu jeder der besprochenen trigonometrischen Funktionen gibt es eine entsprechende Umkehrfunktion, die dem Seitenverhältnis wieder den Winkel zuordnet:

- arcsin: *Arcussinus*;
- arccos: *Arcuscosinus*;
- arctan: *Arcustangens*;
- arccot: *Arcuscotangens*.

Kapitel XI: Das Summenzeichen

© 2019 Steven Köhler

Das Summenzeichen I

Wir betrachten die Summe der ersten n natürlichen Zahlen:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + \big(n - 1\big) + n.$$

Aufgrund des sehr speziellen Aufbaus der Summe ist leicht zu erraten, welche Summanden abkürzend als ... dargestellt sind.

Die Summe aus diesem Beispiel lässt sich mit dem *Summenzeichen* wie folgt darstellen:

$$\sum_{i=1}^{n} i.$$

© 2019 Steven Köhler

Das Summenzeichen II

Etwas allgemeiner betrachten wir die folgende Summe:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Die Werte a_i sind alle nach demselben Schema aufgebaut.

Aufgrund des einheitlichen Aufbaus der Summanden ist auch hier gut zu erkennen, welche Summanden abkürzend als ... dargestellt sind.

Die entsprechende abkürzende Schreibweise mit dem Summenzeichen lautet:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Das Summenzeichen III

Es existieren zwei mögliche Schreibweisen für die Summe:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{m \leq i \leq n} a_i$$

Bezeichnungen:

- i: *Indexvariable*, *Laufvariable*
- m: *Startwert*
- n: *Endwert*
- a_i: der i-*te Summand*

Das Summenzeichen IV

Einige Beispiele:

- $\sum_{i=0}^{5} i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
- $\sum_{k=2}^{7} k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$
- $\sum_{i=1}^{4} \frac{i+1}{i} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4}$

Aufgaben

Aufgabe XI-1

Schreibe die folgenden Summen ohne das Summenzeichen:

a) $\sum_{1 \leq k \leq 4} a_k$ b) $\sum_{\substack{1 \leq i \leq 10 \\ i\text{: gerade}}} a_i$ c) $\sum_{\substack{0 \leq j \leq 10 \\ j\text{: ungerade}}} 2^j$

d) $\sum_{\substack{1 \leq j \leq 15 \\ j\text{: Primzahl}}} b_j$ e) $\sum_{\substack{1 \leq k \leq 50 \\ k\text{: Quadratzahl}}} a_k$

Hinweis: Es ist nicht notwendig, die Summen auszurechnen.

Addition von Summen I

Zur Erinnerung: Das Summenzeichen ist lediglich eine abkürzende Schreibweise.

Gegeben sind die folgenden beiden Summen:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$
$$\sum_{i=0}^{n} b_i = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$$

Frage: Wie sieht die Summe der beiden Summen aus?

$$\sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} b_i$$

Addition von Summen II

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} b_i &= \big(a_0 + a_1 + \ldots + a_n\big) + \big(b_0 + b_1 + \ldots + b_n\big)\\ &= \big(a_0 + b_0\big) + \big(a_1 + b_1\big) + \ldots + \big(a_n + b_n\big)\\ &= \sum_{i=0}^{n} \big(a_i + b_i\big)\end{aligned}$$

Subtraktion von Summen

Die Subtraktion von Summen funktioniert nach demselben Schema wie die Addition.

Gegeben sind die folgenden beiden Summen:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$
$$\sum_{i=0}^{n} b_i = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$$

Als Differenz ergibt sich:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i - \sum_{i=0}^{n} b_i = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i - b_i\right)$$

Ausklammern von gemeinsamen Faktoren

Da die Notation mit dem Summenzeichen nur eine Kurzschreibweise für „normale Summen“ ist, dürfen natürlich alle Regeln der normalen Summen auch mit dem Summenzeichen verwendet werden. Insbesondere gilt dies für die Möglichkeit, gemeinsame Faktoren auszuklammern:

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda \cdot a_i = \lambda \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Multiplikation von Summen I

Gegeben sind die folgenden beiden Summen:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$
$$\sum_{j=0}^{m} b_j = b_0 + b_1 + \ldots + b_m$$

Frage: Wie sieht das Produkt der beiden Summen aus?

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j\right)$$

Multiplikation von Summen II

Bei der Multiplikation wird jedes Element der ersten Summe mit jedem Element der zweiten Summe multipliziert:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j\right) &= (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) \cdot (b_0 + b_1 + \ldots + b_m) \\
&= a_0 b_0 + \ldots + a_0 b_m + \ldots + a_n b_0 + \ldots + a_n b_m \\
&= (a_0 b_0 + \ldots + a_0 b_m) + \ldots + (a_n b_0 + \ldots + a_n b_m) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (a_i b_0 + a_i b_1 + \ldots + a_i b_m) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_i b_j\right)
\end{aligned}$$

Multiplikation von Summen III

Als Produkt der beiden Summen ergibt sich also:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j\right) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_i b_j\right).$$

Man nennt dies auch das *allgemeine Distributivgesetz*.

Multiplikation von Summen IV

Beispiel:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{1} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{2} b_j\right) &= (a_0 + a_1) \cdot (b_0 + b_1 + b_2) \\ &= a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_0 b_2 + a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_1 b_2\end{aligned}$$

Doppelsummen I

Als *Doppelsumme* bezeichnet man eine Summe, die über einer Summe definiert ist.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

Sind die Indizes der Summen unabhängig, darf die Reihenfolge der Summenzeichen vertauscht werden:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Doppelsummen II

Dies ist leicht einzusehen:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{n}\left(a_{i1} + \ldots + a_{im}\right) \\
&= \left(a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1m}\right) + \ldots + \left(a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{nm}\right) \\
&= \left(a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{n1}\right) + \ldots + \left(a_{1m} + a_{2m} + \ldots + a_{nm}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\left(a_{1j} + \ldots + a_{nj}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}
\end{aligned}$$

Indextransformationen I

Als *Indextransformation* werden solche Umformungen bezeichnet, die nur mit den Indizes der Summanden bzw. der Summe geschehen, ohne dabei den Wert der Summe zu verändern.

Indextransformationen II

Eine sehr einfache Indextransformation ist das Verschieben des *Summationsindex* um 1:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1}.$$

Indextransformationen III

Es ist leicht einzusehen, dass diese beiden Summen gleich sind:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1} &= a_{1-1} + a_{2-1} + \ldots + a_{(n+1)-1} \\ &= a_0 + a_1 + \ldots + a_n\end{aligned}$$

Indextransformationen IV

Im Allgemeinen darf man selbstverständlich den Summationsindex auch um einen beliebigen konstanten Wert verschieben:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k}$$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m-k}^{n-k} a_{i+k}$$

Indextransformationen V

Eine weitere Indextransformation ergibt sich daraus, dass die Notation mit dem Summenzeichen nur eine abkürzende Schreibweise darstellt und die Addition kommutativ ist:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}.$$

Indextransformationen VI

Auch diese Gleichheit ist leicht einzusehen:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} a_i &= a_0 + a_1 + \ldots + a_n \\ &= a_n + \ldots + a_1 + a_0 \\ &= a_{n-0} + \ldots + a_{n-(n-1)} + a_{n-n} \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}.\end{aligned}$$

Indextransformationen VII

Die Umformung auf der vorherigen Folie ist nur gültig, falls die Summe den Startwert 0 besitzt. Für alle anderen Startwerte gilt die folgende Umformung:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_{(n+m)-i}.$$

Aufgaben

Aufgabe XI-2

Entscheide, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Begründe deine Antworten!

a) $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} a_i = \sum_{j=6}^{n+4} a_{j-4}$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i-1}$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} i = \sum_{i=2}^{7} (i-2)$

d) $\displaystyle\sum_{k=4}^{8} a_k = \sum_{k=4}^{8} a_{8-k}$

Teleskopsummen

Teleskopsummen sind Summen der folgenden Art:

$$\sum_{i=0}^{n} \left(a_i - a_{i+1}\right).$$

Aufgrund des besonderen Aufbaus der Summanden heben sich beim Aufsummieren die meisten der Summanden gegenseitig auf:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} \left(a_i - a_{i+1}\right) &= \left(a_0 - a_1\right) + \left(a_1 - a_2\right) + \ldots + \left(a_n - a_{n+1}\right) \\ &= a_0 + \left(-a_1 + a_1\right) + \ldots + \left(-a_n + a_n\right) - a_{n+1} \\ &= a_0 - a_{n+1}.\end{aligned}$$

© 2019 Steven Köhler