Vorkurs: Mathematik für Informatiker

Teil 4

Wintersemester 2019/20

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Dimitri Popov

popov@informatik.uni-hamburg.de

Florian Schneider

fschneider@informatik.uni-hamburg.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel XVI: Vektoren

Definition I

Im allgemeinen Sinn versteht man in der linearen Algebra unter einem *Vektor* ein Element eines *Vektorraums*, d.h. ein Objekt, das zu anderen Vektoren addiert und mit Zahlen, die *Skalare* genannt werden, multipliziert werden kann. (Quelle: Wikipedia)

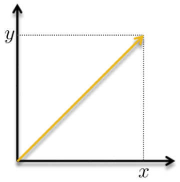
Definition II

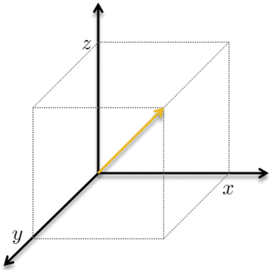
In der analytischen Geometrie kann man einen Vektor als ein Objekt auffassen, das eine *Parallelverschiebung* in der *Ebene* oder im *Raum* beschreibt.

Ein Vektor kann als Pfeil aufgefasst werden, der einen *Urbildpunkt* mit seinem *Bildpunkt* verbindet.

Definition III

Jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ bzw. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ kann ein Vektor zugeordnet werden.





Dies gilt analog ebenfalls für alle $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Schreibweise I

Ein Vektor kann wie folgt dargestellt werden:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Anstatt die einzelnen Einträge mit x, y oder z zu bezeichnen, ist auch die folgende Notation sehr gebräuchlich:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Schreibweise II

Bisher haben wir Vektoren immer als *Spaltenvektoren* betrachtet:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man Vektoren aber auch als *Zeilenvektoren* betrachten:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

Zur besseren Übersicht dürfen zwischen den einzelnen Einträgen auch Trennzeichen – beispielsweise Kommas oder Semikolons – gesetzt werden:

$$v = \begin{pmatrix} v_1, & v_2, & v_3 \end{pmatrix}.$$

Nullvektor

Als *Nullvektor* wird der folgende spezielle Vektor bezeichnet, dessen Einträge alle Null sind:

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Oft wird der Nullvektor mit 0 und manchmal als o bezeichnet.

Transponieren von Vektoren

Vektoren können *transponiert* werden. Das bedeutet nichts anderes als einen Zeilenvektor als Spaltenvektor aufzuschreiben – und umgekehrt:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{wird zu} \quad v^T = (v_1, v_2, v_3);$$

$$u = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{wird zu} \quad u^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Länge eines Vektors

Die *Länge eines Vektors* lässt sich leicht mithilfe des *Skalarprodukts* oder geometrisch über den *Satz des Pythagoras* bestimmen. Es gilt

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Allgemein gilt:

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}.$$

Normieren von Vektoren

Unter einem *normierten Vektor* v' zu einem Vektor v versteht man einen Vektor der Länge 1, der dieselbe Richtung wie v besitzt. Man erhält den normierten Vektor v' zu einem beliebigen Vektor v, indem man v mit dem Reziproken seiner Länge multipliziert.

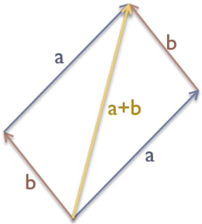
$$v' = \frac{1}{|v|} \cdot v$$

Addition von Vektoren

Die Addition von Vektoren erfolgt komponentenweise:

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$

Grafisch kann man die Vektoraddition als Hintereinanderhängen der Vektoren betrachten.

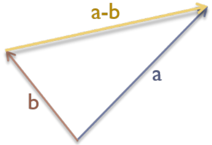


Subtraktion von Vektoren

Die Subtraktion von Vektoren erfolgt ebenfalls komponentenweise:

$$a - b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}.$$

Man kann die Subtraktion auch als Addition des Vektors $-b$ zum Vektor a betrachten.
Betrachtet man a und b als Ortsvektoren der Punkte A und B, so stellt der Vektor $a - b$ den Vektor dar, der den Punkt B auf den Punkt A abbildet. Grafisch sieht dies wie folgt aus:

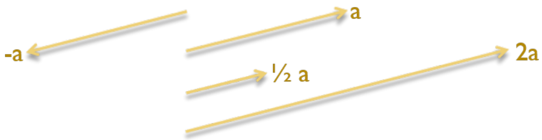


Skalare Multiplikation

Ein Vektor kann mit einem konstanten Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert werden. Den Wert λ nennt man *Skalar*.

$$\lambda a = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Man kann die *skalare Multiplikation* als Strecken oder Stauchen des Vektors interpretieren.



Aufgaben

Aufgabe XVI-1

a) Berechne die Summe und die Differenzen der beiden Vektoren $a = (5, 0, 23)$ und $b = (4, 2, -7)$.

b) Berechne die Summe und die Differenzen der beiden Vektoren $a = (47, -8, 0)$ und $b = (3, 42)$.

Aufgabe XVI-2

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (7, 5, -3)$ und $v_3 = (0, 2, 1)$. Berechne die Länge des Vektors $v = v_1 - v_2 + 3v_3$.

Aufgaben

Aufgabe XVI-3

Entscheide, ob die Vektoren $v_1 = (4, -2, 5)$ und $v_2 = (-2, 4, 0)$ orthogonal sind. Begründe deine Antwort.

Skalarprodukt I

Das *Skalarprodukt* (auch *inneres Produkt* oder *Punktprodukt*) ist eine weitere Art der Vektormultiplikation. Dabei werden die Vektoren komponentenweise multipliziert und diese Produkte aufsummiert:

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Man nennt dies auch die *Koordinatenform* des Skalarprodukts.

Skalarprodukt II

Anhand des Skalarprodukts zweier Vektoren a und b kann man Rückschlüsse auf den Winkel zwischen diesen beiden Vektoren ziehen.

Es gilt:

$$a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \perp b.$$

In Worten: Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist genau dann 0, wenn die beiden Vektoren *senkrecht zueinander* (*orthogonal*) sind.

Skalarprodukt III

Eine andere Art, das Skalarprodukt zu definieren, ist die folgende:

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos\alpha.$$

- $|a|$ und $|b|$ sind die Längen der Vektoren a und b;
- α ist der zwischen den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel.

Skalarprodukt IV

Aus der Formel

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$$

kann man Rückschlüsse auf den Winkel zwischen den beiden Vektoren a und b ziehen:

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}.$$

Hieraus folgt

$$\alpha = \arccos \left(\frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} \right).$$

Skalarprodukt V

Abschließend sehen wir uns an, wie die bereits erwähnte Koordinatenform des Skalarprodukts hergeleitet werden kann.

Gegeben seien die beiden Vektoren $u = (u_1, u_2, u_3)$ und $v = (v_1, v_2, v_3)$. φ sei der zwischen u und v eingeschlossene Winkel.

Nach dem Kosinussatz gilt

$$|v - u|^2 = |v|^2 + |u|^2 - 2|u||v| \cos \varphi.$$

Umformen ergibt

$$|u||v| \cos \varphi = \frac{1}{2}\left(|v|^2 + |u|^2 - |v - u|^2\right).$$

Skalarprodukt VI

Einsetzen der Definition des Skalarprodukts ergibt

$$u \cdot v = \frac{1}{2}\left(|v|^2 + |u|^2 - |v-u|^2\right).$$

Mit der bekannten Formel für den Betrag eines Vektors erhält man:

$$\begin{aligned}
u \cdot v &= \frac{1}{2}\Bigg(\left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\right)^2 + \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\right)^2 \\
&\qquad - \left(\sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2}\right)^2\Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\cancel{v_1^2} + \cancel{v_2^2} + \cancel{v_3^2} + \cancel{u_1^2} + \cancel{u_2^2} + \cancel{u_3^2} - \cancel{v_1^2} + 2v_1u_1 - \cancel{u_1^2} \\
&\qquad - \cancel{v_2^2} + 2v_2u_2 - \cancel{u_2^2} - \cancel{v_3^2} + 2v_3u_3 - \cancel{u_3^2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\left(2u_1v_1 + 2u_2v_2 + 2u_3v_3\right) \\
&= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.
\end{aligned}$$

Kreuzprodukt

Das *Kreuzprodukt* (auch *äußeres Produkt*, *vektorielles Produkt* oder *Vektorprodukt*) ist ebenfalls eine Art, zwei Vektoren a und b zu multiplizieren. Das Resultat ist ein neuer Vektor c, der sowohl senkrecht zu a (d.h. $a \perp c$) als auch senkrecht zu b (d.h. $b \perp c$) steht:

$$c = a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Wichtig: Das Kreuzprodukt ist nur im $\mathbb{R}^3$ definiert!

Aufgaben

Aufgabe XVI-4

Gegeben sind die folgenden Vektoren a, b und c:

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme $a \cdot b$, $a \cdot c$ sowie $b \cdot c$. Welche der Vektoren a, b und c sind senkrecht zueinander?

b) Bestimme einen Vektor, der sowohl senkrecht zu a als auch senkrecht zu b ist. Gib diesen als normierten Vektor an.

Kapitel XVII: Geraden

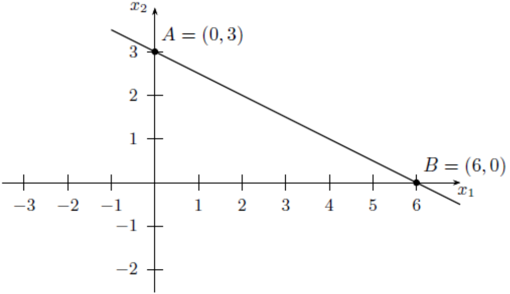
Definition I

Eine *Gerade* oder *gerade Linie* ist ein Element der Geometrie. Anschaulich kann man sich darunter eine unendlich lange, dünne Linie vorstellen.

Eine durch 2 Punkte begrenzte Gerade nennt man *Strecke*.

Definition II

Beispiel einer Geraden, die durch die Punkte $A = (0, 3)$ und $B = (6, 0)$ verläuft:



Durch die Punkte A und B wird zudem die Strecke $\overline{AB}$ begrenzt.

Darstellungsformen

Eine Gerade kann auf mehrere Arten dargestellt werden:

- die Koordinatenform;
- die Parameterform;
- die Normalenform.

Koordinatenform I

<u>Definition</u>:

Jede Gerade in der x_1, x_2-Ebene lässt sich durch eine *Koordinatengleichung*

$$ax_1 + bx_2 + c = 0$$

beschreiben, bei der mindestens einer der beiden Koeffizienten a und b ungleich Null ist.

Alle Punkte, die diese Gleichung erfüllen, liegen auf der Geraden; alle Punkte, die diese Gleichung nicht erfüllen, liegen nicht auf der Geraden.

Koordinatenform II

Aufgabe:

Prüfe, ob der Punkt $A = (5, 3)$ auf der Geraden liegt, die durch die Gleichung

$$-x_1 + 3x_2 - 4 = 0$$

beschrieben wird.

Koordinatenform III

Lösung:

Der Punkt A hat die Koordinaten $(5, 3)$. Setzt man nun für $x_1 = 5$ und für $x_2 = 3$ ein, so ergibt sich

$$-5 + 3 \cdot 3 - 4 = 0.$$

Folglich liegt der Punkt A auf der Geraden.

Dieses Verfahren nennt man *Punktprobe*, da man für einen Punkt probiert, ob er auf der Geraden liegt.

Koordinatenform IV

Frage:

Wie findet man die Koordinatenform, wenn lediglich zwei Punkte der Geraden bekannt sind?

Koordinatenform V

Antwort:

Man kann es berechnen. Dies geht beispielsweise

- durch Aufstellen der Geradengleichung;
- mit dem Gauß-(Jordan-)Verfahren;
- über die Parameter- oder Normalenform.

Im Folgenden beschäftigen wir uns zunächst damit, die Geradengleichung aufzustellen.

Aufstellen einer Geradengleichung I

Jede Gerade kann in der folgenden Form dargestellt werden:

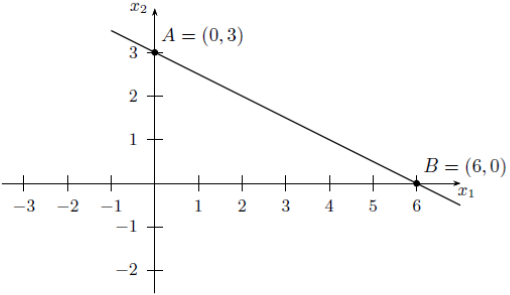
$$x_2 = ax_1 + b.$$

Die Bezeichnungen sind dabei wie folgt:

- x_1 und x_2 sind die Koordinaten;
- a ist der Anstieg der Geraden;
- b ist die Verschiebung in x_2-Richtung.

Aufstellen einer Geradengleichung II

Wir führen das Verfahren exemplarisch an dem zuvor verwendeten Beispiel einer Geraden durch.



Aufstellen einer Geradengleichung III

Den Anstieg der Geraden berechnet man leicht mithilfe eines *Steigungsdreiecks*. Es gilt:

$$a = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}.$$

In unserem Beispiel ist dies

$$a = \frac{0 - 3}{6 - 0} = -\frac{1}{2}.$$

Wir können die gesuchte Geradengleichung also bereits wie folgt darstellen:

$$x_2 = -\frac{1}{2} x_1 + b.$$

Aufstellen einer Geradengleichung IV

Es verbleibt nun lediglich die Aufgabe, b zu bestimmen.

Dazu stellt man die Gleichung nach b um und setzt einen der Punkte A oder B in die Gleichung ein – sie müssen ja beide auf der Geraden liegen.

$$b = \frac{1}{2}x_1 + x_2.$$

Setzt man beispielsweise den Punkt A ein, so ergibt sich

$$b = \frac{1}{2} \cdot 0 + 3 = 3.$$

Aufstellen einer Geradengleichung V

Die gesuchte Geradengleichung lautet also

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 3.$$

Umstellen ergibt die gesuchte Koordinatenform:

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 - 3 = 0.$$

Alternativ kann diese auch so dargestellt werden:

$$x_1 + 2x_2 - 6 = 0.$$

Aufgaben

Aufgabe XVII-1

Bestimme die Koordinatenform der Geraden, die durch die Punkte $P_1 = (2, 3)$ und $P_2 = (4, 4)$ verläuft.

Aufgabe XVII-2

Bestimme die Koordinatenform der Geraden, die durch die Punkte $P_1 = (2, 1)$, $P_2 = (6, 3)$ und $P_3 = (4, \frac{5}{2})$ verläuft.

Parameterform I

Eine andere, sehr komfortable Möglichkeit eine Gerade darzustellen ist die sogenannte *Parameterform*. Die Gerade wird dabei in der folgenden Form dargestellt:

$$x = p + t \cdot u \quad (t \in \mathbb{R}).$$

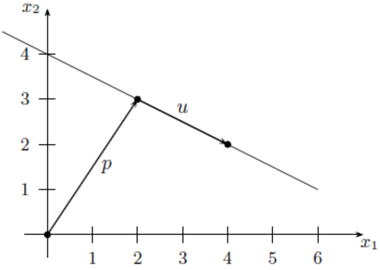
Die Bezeichnungen sind dabei wie folgt:

- p ist der *Stützvektor*;
- u ist ein *Richtungsvektor*;
- $t \in \mathbb{R}$ ist ein beliebiges Skalar.

Diese Darstellung einer Geraden wird auch *vektorielle Punkt-Richtungsform* genannt.

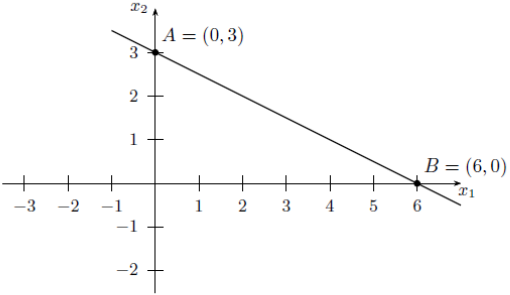
Parameterform II

Bildlich veranschaulicht bedeutet dies, dass die Gerade durch einen Punkt auf der Geraden (= der Stützvektor p) sowie die Richtung der Geraden (= der Richtungsvektor u) beschrieben wird.



Parameterform III

Wir führen auch dieses Verfahren exemplarisch an dem bereits bekannten Beispiel einer Geraden vor.



Parameterform IV

Als Stützvektor können wir beispielsweise den Vektor $\overrightarrow{0A}$ verwenden, als Richtungsvektor den Vektor $\overrightarrow{AB}$. Es ergibt sich

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6-0 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Die gesuchte Gerade in Parameterform lautet also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Durch geeignete Werte für die Variable t kann jeder Punkt der Geraden dargestellt werden.

Normalenform I

Die letzte hier behandelte Art, eine Gerade darzustellen, ist die *Normalenform*. Dabei wird die Gerade unter Zuhilfenahme einer *Normale* dargestellt – also mit einem zur Gerade senkrechten Vektor. Es gilt

$$n \cdot (x - p) = 0.$$

Die Bezeichnungen sind dabei wie folgt:

- n ist die Normale;
- p ist ein fester Punkt auf der Gerade;
- x ist der zu prüfende Punkt.

Wichtig: Die Normalenform einer Geraden existiert nur im $\mathbb{R}^2$.

Normalenform II

Eine alternative Schreibweise erhält man, wenn man in

$$n \cdot (x - p) = 0$$

n und p ausmultipliziert. Es folgt

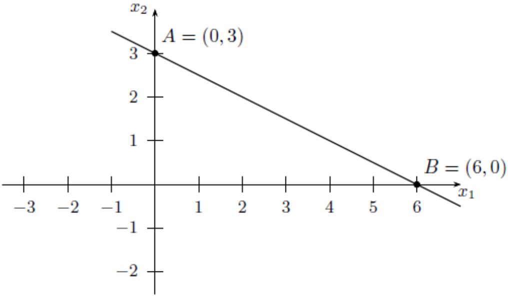
$$n \cdot x + c = 0.$$

Die Bezeichnungen sind dabei wie folgt:

- n ist die Normale;
- x ist der zu prüfende Punkt;
- c ist ein konstanter Wert, der für alle Punkte der Geraden gilt.

Normalenform III

Wir führen auch dies wieder an unserem bisher verwendeten Beispiel vor – unter Berücksichtigung der Ergebnisse der Darstellung in Parameterform.



Normalenform IV

Für einen zweidimensionalen Vektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ist stets jedes Vielfache des Vektors $\begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = -v_1 v_2 + v_1 v_2 = 0.$$

Normalenform V

Nach der Bestimmung einer Normalen zum Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ ergibt sich die folgende Normalenform:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot x + c = 0.$$

Einsetzen eines Punkts der Geraden und Ausrechnen von c ergibt

$$c = -\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -(3 \cdot 0 + 6 \cdot 3) = -18.$$

Normalenform VI

Der berechnete Wert c ist für jeden Punkt der Geraden identisch.

Für die Normalenform der Geraden ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot x - 18 = 0.$$

Alternativ kann die Normalenform auch wie folgt angegeben werden:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \left(x - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Aufgaben

Aufgabe XVII-3

Bestimme die Parameter- und die Normalenform der Geraden, die durch die Punkte $P_1 = (2, 3)$ und $P_2 = (4, 4)$ verläuft.

Ergänzungen zur Parameterform I

Die besprochene Parameterform ging bisher stets von einem $t \in \mathbb{R}$ aus:

$$x = p + t \cdot u \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Es ist jedoch ohne Weiteres möglich, t einzuschränken.

Beispielsweise kann t auf ein *uneigentliches Intervall* eingeschränkt werden (beispielsweise $t > 1$ oder $t \leq -2$). In diesem Fall stellt die Parameterform eine *Halbgerade* dar.

t kann außerdem auf ein endliches Intervall eingeschränkt werden (beispielsweise $0 \leq t \leq 1$). Dann wird durch die Parameterform eine *Strecke* dargestellt.

Ergänzungen zur Parameterform II

Beispiel

Gesucht ist die Parameterdarstellung der Strecke $\overline{PQ}$ für $0 \le t \le 1$.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\
&= t \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \qquad (0 \le t \le 1)
\end{aligned}$$

Ergänzungen zur Parameterform III

Die gesuchte Parameterform lautet also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Durch Vertauschen von P und Q ergibt sich analog

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Kapitel XVIII: Wiederholungen

Aufgaben

Aufgabe XVIII-1

Vereinfache die folgenden Terme soweit wie möglich:

a) $\log\left(\frac{a}{b^2}\right) - \log\left(b^{-1}\right) + \log\left(\frac{a^2}{b^{-1}}\right)$

b) $\log\left(\frac{a}{2b}\right)$

c) $\log\left(\sqrt[3]{a^2}\right) - \log\left(a\right) + 2\log\left(\frac{1}{7}a\right)$

Aufgabe XVIII-2

Vereinfache die folgenden Terme soweit wie möglich:

a) $a^{-3}a^3a^{-1}$

b) $\dfrac{\left(x^4z^3\right)^2}{x^6z^2}$

c) $\dfrac{7a^4b^{-6}}{49a^8b^{-3}}$

Aufgaben

Aufgabe XVIII-3

Bestimme x!

a) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{0,5}\right)^x = \frac{1}{8}$ b) $\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^x = \frac{1}{9}$ c) $\left(0,4^{0,25}\right)^x = 0,4$

Aufgabe XVIII-4

Beschreibe in deinen Worten, was die folgende Aussage bedeutet: „Die trigonometrischen Funktionen sind periodisch“. Gib für die folgenden Funktionen die Periodenlänge an:

$$\sin x \qquad \cos(2x) \qquad \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$$

Aufgaben

Aufgabe XVIII-5

Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $2x^2 + \frac{3}{2}x - 2 = 0$

b) $x^2 + 3x - 1 = x - 3$

c) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

Aufgabe XVIII-6

Gegeben seien die nachfolgenden Vektoren a und b. Bestimme x derart, dass $a \perp b$ gilt!

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}.$$