

# Vorkurs: Mathematik für Informatiker

Teil 4

Wintersemester 2019/20

## Inhaltsverzeichnis

- ▶ Teil 1
- ▶ Teil 2
- ▶ Teil 3
- ▶ Teil 4
  - ▶ Vektoren
  - ▶ Geraden\*
  - ▶ Wiederholungen\*

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Dimitri Popov

popov@informatik.uni-hamburg.de

Florian Schneider

f.schneider@informatik.uni-hamburg.de

## Kapitel XVI: Vektoren

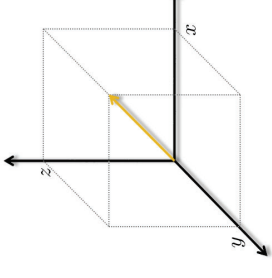
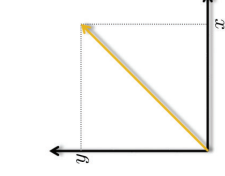
## Definition I

Im allgemeinen Sinn versteht man in der linearen Algebra unter einem *Vektor* ein Element eines *Vektorraums*, d.h. ein Objekt, das zu anderen Vektoren addiert und mit Zahlen, die *Skalare* genannt werden, multipliziert werden kann. (Quelle: Wikipedia)

&gt;&gt; 5

## Definition III

Jedem Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  bzw.  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  kann ein Vektor zugeordnet werden.



Dies gilt analog ebenfalls für alle  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

&gt;&gt; 7

## Definition II

In der analytischen Geometrie kann man einen Vektor als ein Objekt auffassen, das eine *Parallelverschiebung* in der *Ebene* oder im *Raum* beschreibt.

Ein Vektor kann als Pfeil aufgefasst werden, der einen *Urbildpunkt* mit seinem *Bildpunkt* verbindet.

&gt;&gt; 6

## Schreibweise I

Ein Vektor kann wie folgt dargestellt werden:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Anstatt die einzelnen Einträge mit  $x$ ,  $y$  oder  $z$  zu bezeichnen, ist auch die folgende Notation sehr gebräuchlich:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

&gt;&gt; 8

## Schreibweise II

Bisher haben wir Vektoren immer als *Spaltenvektoren* betrachtet:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man Vektoren aber auch als *Zeilenvektoren* betrachten:

$$v = (v_1 \quad v_2 \quad v_3).$$

Zur besseren Übersicht dürfen zwischen den einzelnen Einträgen auch Trennzeichen – beispielsweise Kommas oder Semikolons – gesetzt werden:

$$v = (v_1, \quad v_2, \quad v_3).$$

## Transponieren von Vektoren

Vektoren können *transponiert* werden. Das bedeutet nichts anderes als einen Zeilenvektor als Spaltenvektor aufzuschreiben – und umgekehrt:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{wird zu} \quad v^T = (v_1, v_2, v_3);$$

$$u = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{wird zu} \quad u^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

## Nullvektor

Als *Nullvektor* wird der folgende spezielle Vektor bezeichnet, dessen Einträge alle Null sind:

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Oft wird der Nullvektor mit 0 und manchmal als *o* bezeichnet.

## Länge eines Vektors

Die *Länge* eines Vektors lässt sich leicht mithilfe des *Skalarprodukts* oder geometrisch über den *Satz des Pythagoras* bestimmen. Es gilt

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Allgemein gilt:

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

## Normieren von Vektoren

Unter einem *normierten Vektor*  $v'$  zu einem Vektor  $v$  versteht man einen Vektor der Länge 1, der dieselbe Richtung wie  $v$  besitzt. Man erhält den normierten Vektor  $v'$  zu einem beliebigen Vektor  $v$ , indem man  $v$  mit dem Reziproken seiner Länge multipliziert.

$$v' = \frac{1}{|v|} \cdot v$$

&gt;&gt; 13

© 2019 Steven Köhler

Wintersemester 2019/20

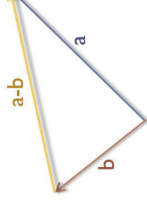
## Subtraktion von Vektoren

Die Subtraktion von Vektoren erfolgt ebenfalls komponentenweise:

$$a - b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}.$$

Man kann die Subtraktion auch als Addition des Vektors  $-b$  zum Vektor  $a$  betrachten.

Betrachtet man  $a$  und  $b$  als Ortsvektoren der Punkte  $A$  und  $B$ , so stellt der Vektor  $a - b$  den Vektor dar, der den Punkt  $B$  auf den Punkt  $A$  abbildet. Grafisch sieht dies wie folgt aus:



&gt;&gt; 15

© 2019 Steven Köhler

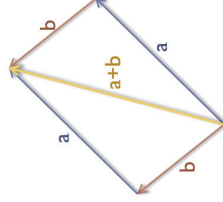
Wintersemester 2019/20

## Addition von Vektoren

Die Addition von Vektoren erfolgt komponentenweise:

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$

Grafisch kann man die Vektoraddition als Hintereinanderhängen der Vektoren betrachten.



&gt;&gt; 14

© 2019 Steven Köhler

Wintersemester 2019/20

## Skalare Multiplikation

Ein Vektor kann mit einem konstanten Faktor  $\lambda \in \mathbb{R}$  multipliziert werden. Den Wert  $\lambda$  nennt man *Skalar*.

$$\lambda a = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Man kann die *skalare Multiplikation* als Strecken oder Stauchen des Vektors interpretieren.



&gt;&gt; 16

© 2019 Steven Köhler

Wintersemester 2019/20

## Aufgaben

### Aufgabe XVI-1

- Berechne die Summe und die Differenzen der beiden Vektoren  $a = (5, 0, 23)$  und  $b = (4, 2, -7)$ .
- Berechne die Summe und die Differenzen der beiden Vektoren  $a = (47, -8, 0)$  und  $b = (3, 42)$ .

### Aufgabe XVI-2

Gegeben seien die Vektoren  $v_1 = (1, 2, 3)$ ,  $v_2 = (7, 5, -3)$  und  $v_3 = (0, 2, 1)$ . Berechne die Länge des Vektors  $v = v_1 - v_2 + 3v_3$ .

&gt;&gt; 17

## Skalarprodukt I

Das *Skalarprodukt* (auch *inneres Produkt* oder *Punktprodukt*) ist eine weitere Art der Vektormultiplikation. Dabei werden die Vektoren komponentenweise multipliziert und diese Produkte aufsummiert:

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Man nennt dies auch die *Koordinatenform* des Skalarprodukts.

&gt;&gt; 19

## Aufgaben

### Aufgabe XVI-3

Entscheide, ob die Vektoren  $v_1 = (4, -2, 5)$  und  $v_2 = (-2, 4, 0)$  orthogonal sind. Begründe deine Antwort.

&gt;&gt; 18

## Aufgaben

### Aufgabe XVI-3

Entscheide, ob die Vektoren  $v_1 = (4, -2, 5)$  und  $v_2 = (-2, 4, 0)$  orthogonal sind. Begründe deine Antwort.

&gt;&gt; 19

## Skalarprodukt II

Anhand des Skalarprodukts zweier Vektoren  $a$  und  $b$  kann man Rückschlüsse auf den Winkel zwischen diesen beiden Vektoren ziehen.

Es gilt:

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a \perp b.$$

**In Worten:** Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist genau dann 0, wenn die beiden Vektoren *senkrecht zueinander* (*orthogonal*) sind.

&gt;&gt; 20

## Skalarprodukt III

Eine andere Art, das Skalarprodukt zu definieren, ist die folgende:

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha.$$

- ▶  $|a|$  und  $|b|$  sind die Längen der Vektoren  $a$  und  $b$ ;
- ▶  $\alpha$  ist der zwischen den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel.

## Skalarprodukt V

Abschließend sehen wir uns an, wie die bereits erwähnte Koordinatenform des Skalarprodukts hergeleitet werden kann.

Gegeben seien die beiden Vektoren  $u = (u_1, u_2, u_3)$  und  $v = (v_1, v_2, v_3)$ .  $\varphi$  sei der zwischen  $u$  und  $v$  eingeschlossene Winkel.

Nach dem Kosinussatz gilt

$$|v - u|^2 = |v|^2 + |u|^2 - 2|u||v| \cos \varphi.$$

Umformen ergibt

$$|u||v| \cos \varphi = \frac{1}{2} (|v|^2 + |u|^2 - |v - u|^2).$$

## Skalarprodukt IV

Aus der Formel

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$$

kann man Rückschlüsse auf den Winkel zwischen den beiden Vektoren  $a$  und  $b$  ziehen:

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}.$$

Hieraus folgt

$$\alpha = \arccos \left( \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} \right).$$

## Skalarprodukt VI

Einsetzen der Definition des Skalarprodukts ergibt

$$u \cdot v = \frac{1}{2} (|v|^2 + |u|^2 - |v - u|^2).$$

Mit der bekanntesten Formel für den Betrag eines Vektors erhält man:

$$\begin{aligned} u \cdot v &= \frac{1}{2} \left( \left( \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right)^2 + \left( \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \right)^2 \right) \\ &\quad - \left( \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + 2v_1u_1 - 2v_2u_2 - 2v_3u_3 \right) \\ &= \frac{1}{2} (2u_1v_1 + 2u_2v_2 + 2u_3v_3) \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \end{aligned}$$

## Kreuzprodukt

Das *Kreuzprodukt* (auch *äußeres Produkt*, *vektorielles Produkt* oder *Vektorprodukt*) ist ebenfalls eine Art, zwei Vektoren  $a$  und  $b$  zu multiplizieren. Das Resultat ist ein neuer Vektor  $c$ , der sowohl senkrecht zu  $a$  (d.h.  $a \perp c$ ) als auch senkrecht zu  $b$  (d.h.  $b \perp c$ ) steht:

$$c = a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

**Wichtig:** Das Kreuzprodukt ist nur im  $\mathbb{R}^3$  definiert!

## Kapitel XVII: Geraden

## Aufgaben

## Aufgabe XVI-4

Gegeben sind die folgenden Vektoren  $a$ ,  $b$  und  $c$ :

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Bestimme  $a \cdot b$ ,  $a \cdot c$  sowie  $b \cdot c$ . Welche der Vektoren  $a$ ,  $b$  und  $c$  sind senkrecht zueinander?
- Bestimme einen Vektor, der sowohl senkrecht zu  $a$  als auch senkrecht zu  $b$  ist. Gib diesen als normierten Vektor an.

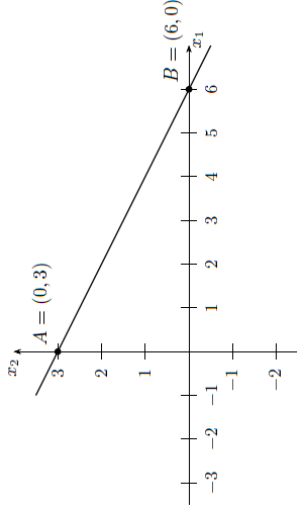
## Definition I

Eine *Gerade* oder *gerade Linie* ist ein Element der Geometrie. Anschaulich kann man sich darunter eine unendlich lange, dünne Linie vorstellen.

Eine durch 2 Punkte begrenzte Gerade nennt man *Strecke*.

## Definition II

Beispiel einer Geraden, die durch die Punkte  $A = (0, 3)$  und  $B = (6, 0)$  verläuft:



Durch die Punkte  $A$  und  $B$  wird zudem die Strecke  $\overline{AB}$  begrenzt.

&gt;&gt; 29

## Koordinatenform I

Definition:

Jede Gerade in der  $x_1, x_2$ -Ebene lässt sich durch eine *Koordinatengleichung*

$$ax_1 + bx_2 + c = 0$$

beschreiben, bei der mindestens einer der beiden Koeffizienten  $a$  und  $b$  ungleich Null ist.

Alle Punkte, die diese Gleichung erfüllen, liegen auf der Geraden; alle Punkte, die diese Gleichung nicht erfüllen, liegen nicht auf der Geraden.

&gt;&gt; 31

## Darstellungsformen

Eine Gerade kann auf mehrere Arten dargestellt werden:

- ▶ die Koordinatenform;
- ▶ die Parameterform;
- ▶ die Normalenform.

Aufgabe:

Prüfe, ob der Punkt  $A = (5, 3)$  auf der Geraden liegt, die durch die Gleichung

$$-x_1 + 3x_2 - 4 = 0$$

beschrieben wird.

&gt;&gt; 30

## Koordinatenform II

&gt;&gt; 32



## Koordinatenform III

Lösung:

Der Punkt A hat die Koordinaten  $(5, 3)$ . Setzt man nun für  $x_1 = 5$  und für  $x_2 = 3$  ein, so ergibt sich

$$-5 + 3 \cdot 3 - 4 = 0.$$

Folglich liegt der Punkt A auf der Geraden.

Dieses Verfahren nennt man *Punktprobe*, da man für einen Punkt probiert, ob er auf der Geraden liegt.

» 33

## Koordinatenform V

Antwort:

Man kann es berechnen. Dies geht beispielsweise

- ▶ durch Aufstellen der Geradengleichung;
- ▶ mit dem Gauß-(Jordan-)Verfahren;
- ▶ über die Parameter- oder Normalenform.

Im Folgenden beschäftigen wir uns zunächst damit, die Geradengleichung aufzustellen.

» 35

## Koordinatenform IV

Frage:

Wie findet man die Koordinatenform, wenn lediglich zwei Punkte der Geraden bekannt sind?

» 34

## Aufstellen einer Geradengleichung I

Jede Gerade kann in der folgenden Form dargestellt werden:

$$x_2 = ax_1 + b.$$

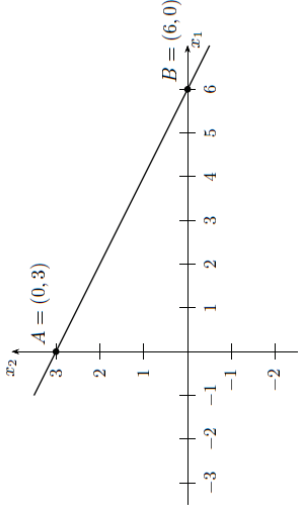
Die Bezeichnungen sind dabei wie folgt:

- ▶  $x_1$  und  $x_2$  sind die Koordinaten;
- ▶  $a$  ist der Anstieg der Geraden;
- ▶  $b$  ist die Verschiebung in  $x_2$ -Richtung.

» 36

## Aufstellen einer Geradengleichung II

Wir führen das Verfahren exemplarisch an dem zuvor verwendeten Beispiel einer Geraden durch.



&gt;&gt; 37

## Aufstellen einer Geradengleichung IV

Es verbleibt nun lediglich die Aufgabe,  $b$  zu bestimmen.

Dazu stellt man die Gleichung nach  $b$  um und setzt einen der Punkte  $A$  oder  $B$  in die Gleichung ein – sie müssen ja beide auf der Geraden liegen.

$$b = \frac{1}{2}x_1 + x_2.$$

Setzt man beispielsweise den Punkt  $A$  ein, so ergibt sich

$$b = \frac{1}{2} \cdot 0 + 3 = 3.$$

&gt;&gt; 39

## Aufstellen einer Geradengleichung III

Den Anstieg der Geraden berechnet man leicht mithilfe eines *Steigungsdreiecks*. Es gilt:

$$a = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}.$$

In unserem Beispiel ist dies

$$a = \frac{0 - 3}{6 - 0} = -\frac{3}{2}.$$

Wir können die gesuchte Geradengleichung also bereits wie folgt darstellen:

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + b.$$

&gt;&gt; 38

## Aufstellen einer Geradengleichung V

Die gesuchte Geradengleichung lautet also

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 3.$$

Umstellen ergibt die gesuchte Koordinatenform:

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 - 3 = 0.$$

Alternativ kann diese auch so dargestellt werden:

$$x_1 + 2x_2 - 6 = 0.$$

&gt;&gt; 40

## Aufgaben

### Aufgabe XVII-1

Bestimme die Koordinatenform der Geraden, die durch die Punkte  $P_1 = (2, 3)$  und  $P_2 = (4, 4)$  verläuft.

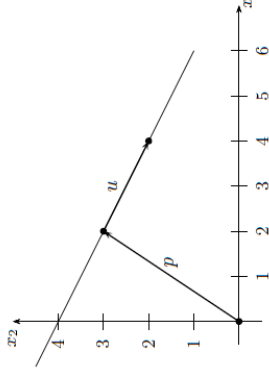
### Aufgabe XVII-2

Bestimme die Koordinatenform der Geraden, die durch die Punkte  $P_1 = (2, 1)$ ,  $P_2 = (6, 3)$  und  $P_3 = (4, \frac{5}{2})$  verläuft.

» 41

## Parameterform II

Bildlich veranschaulicht bedeutet dies, dass die Gerade durch einen Punkt auf der Geraden (= der Stützvektor  $p$ ) sowie die Richtung der Geraden (= der Richtungsvektor  $u$ ) beschrieben wird.



» 43

## Parameterform I

Eine andere, sehr komfortable Möglichkeit eine Gerade darzustellen ist die sogenannte *Parameterform*. Die Gerade wird dabei in der folgenden Form dargestellt:

$$x = p + t \cdot u \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Die Bezeichnungen sind dabei wie folgt:

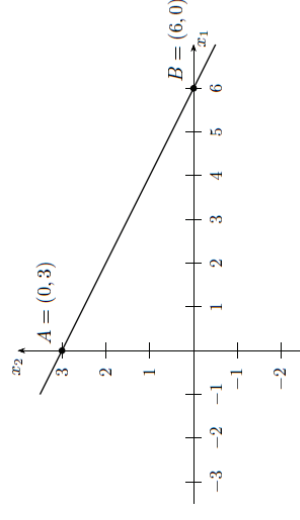
- ▶  $p$  ist der *Stützvektor*;
- ▶  $u$  ist ein *Richtungsvektor*;
- ▶  $t \in \mathbb{R}$  ist ein beliebiges Skalar.

Diese Darstellung einer Geraden wird auch *vektorielle Punkt-Richtungsform* genannt.

» 42

## Parameterform III

Wir führen auch dieses Verfahren exemplarisch an dem bereits bekannten Beispiel einer Geraden vor.



» 44

## Parameterform IV

Als Stützvektor können wir beispielsweise den Vektor  $\overrightarrow{OA}$  verwenden, als Richtungsvektor den Vektor  $\overrightarrow{AB}$ . Es ergibt sich

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6-0 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Die gesuchte Gerade in Parameterform lautet also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Durch geeignete Werte für die Variable  $t$  kann jeder Punkt der Geraden dargestellt werden.

&gt;&gt; 45

© 2019 Steven Köhler

Wintersemester 2019/20

## Normalenform II

Eine alternative Schreibweise erhält man, wenn man in

$$n \cdot (x - p) = 0$$

$n$  und  $p$  ausmultipliziert. Es folgt

$$n \cdot x + c = 0.$$

Die Bezeichnungen sind dabei wie folgt:

- ▶  $n$  ist die Normale;
- ▶  $x$  ist der zu prüfende Punkt;
- ▶  $c$  ist ein konstanter Wert, der für alle Punkte der Geraden gilt.

&gt;&gt; 47

© 2019 Steven Köhler

Wintersemester 2019/20

## Normalenform I

Die letzte hier behandelte Art, eine Gerade darzustellen, ist die *Normalenform*. Dabei wird die Gerade unter Zuhilfenahme einer *Normale* dargestellt – also mit einem zur Gerade senkrechten Vektor. Es gilt

$$n \cdot (x - p) = 0.$$

Die Bezeichnungen sind dabei wie folgt:

- ▶  $n$  ist die Normale;
- ▶  $p$  ist ein fester Punkt auf der Gerade;
- ▶  $x$  ist der zu prüfende Punkt.

**Wichtig:** Die Normalenform einer Geraden existiert nur im  $\mathbb{R}^2$ .

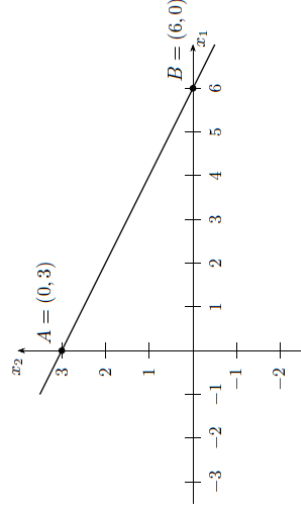
&gt;&gt; 46

© 2019 Steven Köhler

Wintersemester 2019/20

## Normalenform III

Wir führen auch dies wieder an unserem bisher verwendeten Beispiel vor – unter Berücksichtigung der Ergebnisse der Darstellung in Parameterform.



&gt;&gt; 48

© 2019 Steven Köhler

Wintersemester 2019/20

## Normalenform IV

Für einen zweidimensionalen Vektor  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  ist stets jedes Vielfache des Vektors  $\begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$  ein Normalenvektor, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = -v_1 v_2 + v_1 v_2 = 0.$$

&gt;&gt; 49

## Normalenform VI

Der berechnete Wert  $c$  ist für jeden Punkt der Geraden identisch.

Für die Normalenform der Geraden ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot x - 18 = 0.$$

Alternativ kann die Normalenform auch wie folgt angegeben werden:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \left( x - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

&gt;&gt; 51

## Normalenform V

Nach der Bestimmung einer Normalen zum Richtungsvektor  $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$  ergibt sich die folgende Normalenform:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot x + c = 0.$$

Einsetzen eines Punktes der Geraden und Ausrechnen von  $c$  ergibt

$$c = - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -(3 \cdot 0 + 6 \cdot 3) = -18.$$

&gt;&gt; 50

## Aufgaben

## Aufgabe XVII-3

Bestimme die Parameter- und die Normalenform der Geraden, die durch die Punkte  $P_1 = (2, 3)$  und  $P_2 = (4, 4)$  verläuft.

&gt;&gt; 52

## Ergänzungen zur Parameterform I

Die besprochene Parameterform ging bisher stets von einem  $t \in \mathbb{R}$  aus:

$$x = p + t \cdot u \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Es ist jedoch ohne Weiteres möglich,  $t$  einzuschränken.

Beispielsweise kann  $t$  auf ein *uneigentliches Intervall* eingeschränkt werden (beispielsweise  $t > 1$  oder  $t \leq -2$ ). In diesem Fall stellt die Parameterform eine *Halbgerade* dar.

$t$  kann außerdem auf ein endliches Intervall eingeschränkt werden (beispielsweise  $0 \leq t \leq 1$ ). Dann wird durch die Parameterform eine *Strecke* dargestellt.

## Ergänzungen zur Parameterform III

Die gesuchte Parameterform lautet also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Durch Vertauschen von  $P$  und  $Q$  ergibt sich analog

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

## Ergänzungen zur Parameterform II

Beispiel

Gesucht ist die Parameterdarstellung der Strecke  $\overline{PQ}$  für  $0 \leq t \leq 1$ .  
Es gilt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ &= t \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1) \end{aligned}$$

## Kapitel XVIII: Wiederholungen

## Aufgaben

## Aufgabe XVIII-1

Vereinfache die folgenden Terme soweit wie möglich:

a)  $\log\left(\frac{a}{b^2}\right) - \log(b^{-1}) + \log\left(\frac{a^2}{b^{-1}}\right)$       b)  $\log\left(\frac{a}{2b}\right)$

c)  $\log\left(\sqrt[3]{a^2}\right) - \log(a) + 2\log\left(\frac{1}{7}a\right)$

## Aufgabe XVIII-2

Vereinfache die folgenden Terme soweit wie möglich:

a)  $a^{-3}a^3a^{-1}$       b)  $\frac{(x^4z^3)^2}{x^6z^2}$       c)  $\frac{7a^4b^{-6}}{49a^8b^{-3}}$

&gt;&gt; 57

## Aufgaben

## Aufgabe XVIII-5

Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen:

a)  $2x^2 + \frac{3}{2}x - 2 = 0$       b)  $x^2 + 3x - 1 = x - 3$

c)  $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

## Aufgabe XVIII-6

Gegeben seien die nachfolgenden Vektoren  $a$  und  $b$ . Bestimme  $x$  derart, dass  $a \perp b$  gilt!

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

&gt;&gt; 59

## Aufgaben

## Aufgabe XVIII-3

Bestimme  $x$ !

a)  $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{0,5}\right)^x = \frac{1}{8}$       b)  $\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^x = \frac{1}{9}$       c)  $(0,4^{0,25})^x = 0,4$

## Aufgabe XVIII-4

Beschreibe in deinen Worten, was die folgende Aussage bedeutet: „Die trigonometrischen Funktionen sind periodisch“. Gib für die folgenden Funktionen die Periodenlänge an:

$$\sin x \quad \cos(2x) \quad \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$$

&gt;&gt; 58