Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 15.11.2019
(Teil 1)

13. November 2019

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Mengen

Mächtigkeit einer Menge

Unter der *Mächtigkeit* $|M|$ einer (endlichen) Menge M versteht man die Anzahl der in M enthaltenen Elemente. Die Mächtigkeit einer Menge wird auch als *Kardinalität* bezeichnet.

Für die Mächtigkeit einer unendlichen Menge schreibt man häufig ∞.

<u>Beispiele:</u>

$$A = \left\{11, 13, 17, 19\right\}$$

$$\left|A\right| = 4$$

$$B = \left\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\right\}$$

$$\left|B\right| = \infty$$

Vergleichen von Mengen I

Mengen können miteinander verglichen werden.

- *Inklusion*: $A \subseteq B$

  Die Menge A ist vollständig in der Menge B enthalten. Es ist außerdem möglich, dass A und B identisch sind.
  Sprechweise: A ist eine *Teilmenge* von B.

- *Gleichheit*: $A = B$

  Die Mengen A und B sind identisch. Dies ist genau dann der Fall, wenn sowohl $A \subseteq B$ als auch $B \subseteq A$ gilt.
  Sprechweise: A ist gleich B.

Vergleichen von Mengen II

- *strenge Inklusion*: $A \subset B$

  Die Menge A ist vollständig in der Menge B enthalten. Die Mengen A und B sind jedoch nicht identisch. Jedes Element $a \in A$ ist folglich in B enthalten, es gibt jedoch mindestens ein Element $b \in B$, dass nicht in der Menge A enthalten ist.
  Sprechweise: A ist eine *echte Teilmenge* von B.

Trifft keine der genannten Eigenschaften zu, so sind die Mengen *unvergleichbar*.

Operationen auf Mengen I

- *Vereinigung*: $A \cup B$

  In der Menge $A \cup B$ sind alle Elemente enthalten, die entweder in der Menge A, in der Menge B oder in beiden Mengen vorkommen:

  $$A \cup B = \Big\{ x \;\Big|\; x \in A \text{ oder } x \in B \Big\}.$$

  Die *Vereinigungsmenge* von $n \geq 2$ Mengen $A_1, \ldots, A_n$ kann auch wie folgt geschrieben werden:

  $$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \\ &= \Big\{ x \;\Big|\; x \in A_1 \text{ oder } x \in A_2 \text{ oder } \ldots \text{ oder } x \in A_n \Big\}. \end{aligned}$$

Operationen auf Mengen II

- *Schnitt*: $A \cap B$

  In der Menge $A \cap B$ sind alle Elemente enthalten, die sowohl in der Menge A als auch in der Menge B vorkommen:

  $$A \cap B = \Big\{ x \;\Big|\; x \in A \text{ und } x \in B \Big\}.$$

  Die *Schnittmenge* von $n \geq 2$ Mengen $A_1, \ldots, A_n$ kann auch wie folgt geschrieben werden:

  $$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \\ &= \Big\{ x \;\Big|\; x \in A_1 \text{ und } x \in A_2 \text{ und } \ \ldots \ \text{ und } x \in A_n \Big\}.\end{aligned}$$

Operationen auf Mengen III

- *Exklusion*: $A \setminus B$

  In der Menge $A \setminus B$ sind alle Elemente enthalten, die in der Menge A, aber nicht in der Menge B vorkommen:

  $$A \setminus B = \left\{ x \mid x \in A \text{ und } x \notin B \right\}.$$

- *Symmetrische Differenz*: $A \triangle B$

  In der Menge $A \triangle B$ sind alle Elemente enthalten, die entweder nur in der Menge A oder nur in der Menge B vorkommen:

  $$A \triangle B = \left(A \setminus B \right) \cup \left(B \setminus A \right).$$

Operationen auf Mengen IV

- *Potenzmenge*: $\mathcal{P}(A)$

  Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ ist die Menge aller Teilmengen der Menge A. Enthält die Menge A insgesamt $|A| = n$ Elemente, so enthält die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ insgesamt $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ Elemente.

Operationen auf Mengen V

- *Kartesisches Produkt*

  Es seien A und B zwei Mengen. Das *kartesische Produkt* dieser Mengen ist wie folgt definiert:

  $$A \times B = \Big\{ (a, b) \;\Big|\; a \in A \text{ und } b \in B \Big\}.$$

  Es seien A, B und C drei Mengen. Das *kartesische Produkt* dieser Mengen ist wie folgt definiert:

  $$A \times B \times C = \Big\{ (a, b, c) \;\Big|\; a \in A,\ b \in B \text{ und } c \in C \Big\}.$$

  Analog definiert man das *kartesische Produkt* für eine beliebige Anzahl von Mengen $A_1, \ldots, A_n$:

  $$A_1 \times \ldots \times A_n = \Big\{ (a_1, \ldots, a_n) \;\Big|\; a_1 \in A_1,\ \ldots,\ a_n \in A_n \Big\}.$$

Operationen auf Mengen VI

Beispiel:

Es seien die Mengen $A = \left\{1, 2, 3\right\}$ und $B = \left\{2, 3, 4\right\}$ gegeben. Dann gilt:

$$A \cup B = \left\{1, 2, 3, 4\right\}$$

$$A \cap B = \left\{2, 3\right\}$$

$$A \setminus B = \left\{1\right\}$$

$$A \triangle B = \left\{1, 4\right\}$$

$$A \times B = \left\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\right\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \left\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\right\}$$

Aufgabe 1

Es sei $M = \{1, 2\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Welche sind falsch?

(i) $1 \in \mathcal{P}(M)$

(ii) $2 \subseteq \mathcal{P}(M)$

(iii) $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(M)$

(iv) $\{1, 2\} \subseteq \mathcal{P}(M)$

(v) $\{1, \{1\}\} \in \mathcal{P}(M)$

(vi) $\{\{1\}, \{2\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$

(vii) $\{\{1\}, \{2\}\} \subseteq \mathcal{P}(M)$

(viii) $\{(1, 2)\} \subseteq \mathcal{P}(M)$

(ix) $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))| = 2 + \sum_{i=1}^{15} \binom{16}{i}$

(x) $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))| = 2 + \sum_{i=1}^{3} \binom{4}{i}$

Aufgabe 2

Bestimme die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

Abbildungen

Definition I

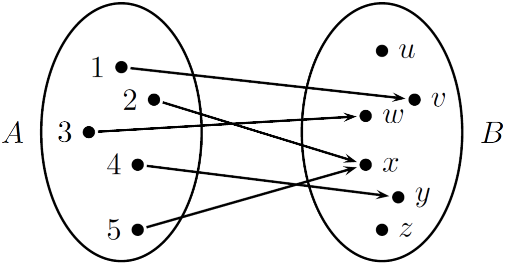
Eine *Funktion* (oder *Abbildung*) $f : A \to B$ stellt eine *Abbildungsvorschrift* dar, die jedem Element der Menge A ein Element der Menge B zuordnet.

Eine Funktion kann formal wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto f(a). \end{aligned}$$

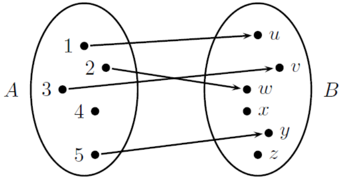
Definition II

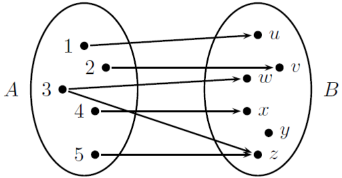
Grafisch lässt sich eine Abbildung wie folgt veranschaulichen:



Definition III

Bei den nachfolgenden Beispielen handelt es sich *nicht* um Abbildungen. (Wieso nämlich?)





Definition IV

Bezeichnungen:

- A: *Definitionsbereich*, *Urbildmenge*
- B: *Bildmenge*, *Bildbereich*
- $A \to B$: *Signatur*
- $a \mapsto f(a)$: *Funktionsvorschrift*, *Abbildungsvorschrift*
- *Wertebereich*: $W_f := f(A) = \left\{ f(a) : a \in A \right\}$.
  Nicht alle Elemente von B müssen ein Urbild haben. Es gilt $f(A) \subseteq B$.

Definition V

Beispiel:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Definitions- und Wertebereich der Funktion f:

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}; \\ W_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Für dieses Beispiel gilt also $W_f \subset \mathbb{R}$.

Eigenschaften von Abbildungen I

Man nennt eine Abbildung

- *injektiv*, falls für alle $x, y \in A$ gilt: Aus $x \neq y$ folgt stets $f(x) \neq f(y)$;
- *surjektiv*, falls es zu jedem $b \in B$ mindestens ein $a \in A$ gibt, für das $f(a) = b$ gilt;
- *bijektiv*, falls sie injektiv und surjektiv ist.

Eigenschaften von Abbildungen II

Beispiele:

1. Es sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$. $f : A \to B$ sei definiert durch $f(1) = 1$, $f(2) = 1$ und $f(3) = 2$.
2. Es sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4\}$. $f : A \to B$ sei definiert durch $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ und $f(3) = 4$.
3. Es sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{4, 5\}$. $f : A \to B$ sei definiert durch $f(1) = 4$, $f(2) = 5$ und $f(3) = 4$.
4. Es sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$. $f : A \to B$ sei definiert durch $f(1) = 4$, $f(2) = 5$ und $f(3) = 3$.

Eigenschaften von Abbildungen III

Lösungen:

1. nicht injektiv, nicht surjektiv
2. injektiv, nicht surjektiv
3. nicht injektiv, surjektiv
4. injektiv, surjektiv, bijektiv

Eigenschaften von Abbildungen IV

Es sei $f : A \to B$ eine Abbildung einer *endlichen* Menge A auf eine *endliche* Menge B. Es gilt:

- Ist $|A| > |B|$, so kann f nicht injektiv sein;
- Ist $|A| < |B|$, so kann f nicht surjektiv sein.

Wichtig: Dies gilt nur für endliche Mengen A und B.

Umkehrfunktion

Ist $f : A \to B$ eine bijektive Funktion, dann bezeichnet man mit $f^{-1} : B \to A$ die zugehörige Umkehrfunktion.

Der Funktionswert $f^{-1}(y)$ ist definiert als das eindeutig bestimmte $x \in A$, für das $f(x) = y$ gilt.

Nachweis der Injektivität I

Der Nachweis der Injektivität erfolgt immer nach demselben einfachen Schema:

$$
\begin{gathered}
f(x) = f(y) \\
\downarrow \\
x = y.
\end{gathered}
$$

Ist $f(x) = f(y)$ nur genau dann wahr, wenn $x = y$ gilt, so ist die Funktion injektiv. Andernfalls ist sie nicht injektiv.

Nachweis der Injektivität II

Aufgabe:

Entscheide, ob die folgende Funktion injektiv ist.

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$f(x) = 5x - 2$$

Nachweis der Injektivität III

Lösung:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(y) \\
5x - 2 &= 5y - 2 \\
5x &= 5y \\
x &= y
\end{aligned}
$$

Aus $f(x) = f(y)$ folgt nur die Lösung $x = y$. Dies bedeutet, dass keine zwei verschiedenen Elemente x und y auf denselben Wert abgebildet werden. Die Funktion ist also injektiv.

Nachweis der Injektivität IV

Aufgabe:

Entscheide, ob die folgende Funktion injektiv ist.

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$f(a, b) = \left(a + b, a^2 + 7\right)$$

Nachweis der Injektivität V

Lösung:

$$f(a,b) = f(c,d)$$
$$\big(a+b, a^2+7\big) = \big(c+d, c^2+7\big)$$

Zwei Tupel sind genau dann gleich, wenn ihre Komponenten übereinstimmen. Es muss gelten:

$$a+b = c+d$$
$$a^2+7 = c^2+7.$$

Nachweis der Injektivität VI

Aus der zweiten Gleichung folgt $a = \pm c$.

Einsetzen in die erste Gleichung und Umstellen nach b ergibt zwei mögliche Lösungen:

$$\text{(I)} \quad \begin{aligned} a &= c \\ b &= d \end{aligned} \qquad\qquad \text{(II)} \quad \begin{aligned} a &= -c \\ b &= 2c + d \end{aligned}$$

Da es mehr als eine Lösung gibt, folgt also insbesondere, dass die Abbildung nicht injektiv sein kann.

Nachweis der Injektivität VII

Alternative Lösung:

Der Nachweis, dass die Funktion nicht injektiv ist, hätte auch durch Angabe eines Gegenbeispiels erfolgen können:

$$f(1, 2) = (3, 1) = f(-1, 4).$$

Da mehrere Elemente der Urbildmenge dasselbe Bild haben, ist die Funktion nicht injektiv.

Nachweis der Injektivität VIII

Aufgabe:

Entscheide, ob die folgenden Funktionen injektiv sind.

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$f(x) = (x+2)^2$$

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$
$$g(x) = (x+2)^2$$

$$h : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^3$$
$$h(a,b) = \Big(ab,\ (a+1)b,\ a(b^2+1)\Big)$$

Nachweis der Injektivität IX

Abschließend noch zwei Bemerkungen zur Injektivität:

- Falls die Bildmenge ein Tupel ist, ist keine Aussage über die Injektivität der Abbildung möglich, wenn die Injektivität lediglich für einzelne Komponenten gezeigt wurde.

$$f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$$
$$f(a, b) = \Big(3a + 2,\ (b-1)^2\Big)$$

- Obwohl für keine der Komponenten Injektivität gilt, kann die gesamte Abbildung dennoch injektiv sein.

$$f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$$
$$f(a, b) = \Big(a + b,\ a - b\Big)$$

Nachweis der Surjektivität I

Der Nachweis der Surjektivität ist im Allgemeinen deutlich schwieriger als der Nachweis der Injektivität.

Für jedes Element b der Bildmenge muss gezeigt werden, dass es mindestens ein Element a der Urbildmenge gibt, für das $f(a) = b$ gilt.

Es gibt leider kein allgemeingültiges Verfahren, dies zu bewerkstelligen. Eine Möglichkeit ist es jedoch, die Umkehrfunktion zu bestimmen, falls diese existiert.

Nachweis der Surjektivität II

Aufgabe:

Entscheide, ob die folgende Funktion surjektiv ist.

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$f(x) = 5x - 2$$

Nachweis der Surjektivität III

Lösung:

Es gilt
$$y = f(x) = 5x - 2.$$

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, stellen wir die Gleichung nach x um:

$$\begin{aligned} 5x &= y + 2 \\ x &= \frac{y+2}{5} \end{aligned}$$

Dies sieht wie die Umkehrfunktion aus, ABER im Allgemeinen gilt $\frac{y+2}{5} \notin \mathbb{Z}$. Beispielsweise hat $y = 1$ kein zugehöriges $x \in \mathbb{Z}$. Die Funktion ist also nicht surjektiv.

Nachweis der Surjektivität IV

Aufgabe:

Entscheide, ob die folgende Funktion surjektiv ist.

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$f(x) = x + 7$$

Nachweis der Surjektivität V

Lösung:

Es gilt

$$y = f(x) = x + 7.$$

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, stellen wir die Gleichung nach x um:

$$x = y - 7.$$

Ist $y \in \mathbb{Z}$, so ist auch $y - 7 \in \mathbb{Z}$. Es bleibt zu prüfen, ob $y - 7$ tatsächlich ein Urbild für y ist. Einsetzen in f ergibt

$$\begin{aligned} f(y - 7) &= y - 7 + 7 \\ &= y. \end{aligned}$$

Die Funktion f ist also surjektiv.

Nachweis der Surjektivität VI

Aufgabe:

Entscheide, ob die folgenden Funktionen surjektiv sind.

$$f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$$
$$f(a, b) = a + b$$

$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$g(x) = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$$

$$h : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^3$$
$$h(a, b) = \left(2a + 3b,\ a^2,\ (b-1)^2 a\right)$$

Nachweis der Surjektivität VII

Abschließend noch zwei Bemerkungen zur Surjektivität:

- Ist eine Komponente einer Abbildung nicht surjektiv, so ist es auch die gesamte Abbildung nicht.

$$h : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^3$$
$$h(a, b) = \left(2a + 3b,\ a^2,\ (b-1)^2 a\right)$$

- Ist jede Komponente einer Abbildung surjektiv, so muss dies dennoch nicht für die gesamte Abbildung gelten.

$$f(a) = \left(a,\ a+1\right)$$

Verkettung von Funktionen I

Es sei $h : A \to C$ eine Komposition (Verkettung) der Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$.

$$h = g \circ f$$
$$h(x) = g\Big(f(x)\Big)$$

Statt Komposition kann man auch Nacheinanderausführung sagen. $g \circ f$ bedeutet also, g wird nach f ausgeführt.

Verkettung von Funktionen II

Es gelten die folgenden Eigenschaften:

- Sind sowohl f als auch g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
- Sind sowohl f als auch g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

Aufgabe 3

Entscheide für die folgenden Abbildungen, ob sie injektiv sind. Gib jeweils eine (kurze) Begründung.

a) $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = \left(n-2\right)^2$

b) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = 42n - 23$

c) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f(n) = \left((n-3)^2, n^2\right)$

d) $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f(a, b) = \left(ba, 5a + 1\right)$

e) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n, m) = 7n - m$

f) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f(x, y) = \left(xy^3, xy^3 - 2y - 9, (y^2 - 5)x\right)$

Aufgabe 4

Entscheide für die folgenden Abbildungen, ob sie surjektiv sind. Gib jeweils eine (kurze) Begründung.

a) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(n) = 23n - 42$

b) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ f(n) = \left((n+5)^2, n^2\right)$

c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ f(n, m) = \left(n + m - 2, n + 1\right)$

d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(n, m) = 7n - m$

e) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n, m) = n + m$

Aufgabe 5

Gibt es bijektive Abbildungen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$? Gib im Falle der Existenz eine solche Abbildung an; begründe im Fall der Nicht-Existenz, wieso eine solche Abbildung nicht existiert.

Wahrheitswerte

Logische Verknüpfungen I

A und B seien Aussagen, die entweder wahr oder falsch sein können.

- *Konjunktion*: $A \wedge B$

  Die Aussage $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr ist.

- *Disjunktion*: $A \vee B$

  Die Aussage $A \vee B$ ist wahr, wenn entweder A oder B wahr ist; oder natürlich auch beide.

Logische Verknüpfungen II

A und B seien Aussagen, die entweder wahr oder falsch sein können.

- *Implikation*: $A \Rightarrow B$

  Die Aussage $A \Rightarrow B$ bedeutet, dass immer, wenn A wahr ist, auch B wahr ist. („B folgt aus A.“)

- *Biimplikation*: $A \Leftrightarrow B$

  Die Aussage $A \Leftrightarrow B$ bedeutet, dass immer, wenn A wahr ist, auch B wahr ist – und umgekehrt. („genau dann wenn“)

Logische Verknüpfungen III

A sei eine Aussage, die entweder wahr oder falsch sein kann.

- *Negation*: $\overline{A}$

  Die Aussage $\overline{A}$ ist genau dann wahr, wenn die Aussage A falsch ist.

Logische Verknüpfungen IV

A	B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \operatorname{xor} B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

Aufgabe 6

Es seien A und B zwei Wahrheitswerte. Zeige mithilfe einer Wahrheitstafel, dass es sich bei $A \Leftrightarrow B$ und $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ um zwei äquivalente Aussagen handelt.