

Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 15.11.2019
(Teil 1)

13. November 2019

» 3

© 2019 Steven Köhler

13. November 2019

Mengen

Mengen

Mächtigkeit einer Menge

Unter der *Mächtigkeit* $|M|$ einer (endlichen) Menge M versteht man die Anzahl der in M enthaltenen Elemente. Die Mächtigkeit einer Menge wird auch als *Kardinalität* bezeichnet.

Für die Mächtigkeit einer unendlichen Menge schreibt man häufig ∞ .

Beispiele:

$$A = \{11, 13, 17, 19\}$$

$$|A| = 4$$

$$B = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

$$|B| = \infty$$

» 4

© 2019 Steven Köhler

13. November 2019

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

» 2

© 2019 Steven Köhler

13. November 2019

Vergleichen von Mengen I

Mengen können miteinander verglichen werden.

- ▶ Inklusion: $A \subseteq B$
Die Menge A ist vollständig in der Menge B enthalten. Es ist außerdem möglich, dass A und B identisch sind.
- ▶ **Sprechweise**: A ist eine *Teilmenge* von B .
- ▶ Gleichheit: $A = B$
Die Mengen A und B sind identisch. Dies ist genau dann der Fall, wenn sowohl $A \subseteq B$ als auch $B \subseteq A$ gilt.
- ▶ **Sprechweise**: A ist gleich B .

Operationen auf Mengen I

- ▶ Vereinigung: $A \cup B$

In der Menge $A \cup B$ sind alle Elemente enthalten, die entweder in der Menge A , in der Menge B oder in beiden Mengen vorkommen:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

Die *Vereinigungsmenge* von $n \geq 2$ Mengen A_1, \dots, A_n kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^n A_i &= A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \\ &= \{x \mid x \in A_1 \text{ oder } x \in A_2 \text{ oder } \dots \text{ oder } x \in A_n\}. \end{aligned}$$

Vergleichen von Mengen II

- ▶ strenge Inklusion: $A \subset B$

Die Menge A ist vollständig in der Menge B enthalten. Die Mengen A und B sind jedoch nicht identisch. Jedes Element $a \in A$ ist folglich in B enthalten, es gibt jedoch mindestens ein Element $b \in B$, dass nicht in der Menge A enthalten ist.

Sprechweise: A ist eine *echte Teilmenge* von B .

Trifft keine der genannten Eigenschaften zu, so sind die Mengen *unvergleichbar*.

Operationen auf Mengen II

- ▶ Schnitt: $A \cap B$

In der Menge $A \cap B$ sind alle Elemente enthalten, die sowohl in der Menge A als auch in der Menge B vorkommen:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

Die *Schnittmenge* von $n \geq 2$ Mengen A_1, \dots, A_n kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^n A_i &= A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \\ &= \{x \mid x \in A_1 \text{ und } x \in A_2 \text{ und } \dots \text{ und } x \in A_n\}. \end{aligned}$$

Operationen auf Mengen III

▶ Exklusion: $A \setminus B$

In der Menge $A \setminus B$ sind alle Elemente enthalten, die in der Menge A , aber nicht in der Menge B vorkommen:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

▶ Symmetrische Differenz: $A \Delta B$

In der Menge $A \Delta B$ sind alle Elemente enthalten, die entweder nur in der Menge A oder nur in der Menge B vorkommen:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Operationen auf Mengen V

▶ Kartesisches Produkt

Es seien A und B zwei Mengen. Das *kartesische Produkt* dieser Mengen ist wie folgt definiert:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Es seien A , B und C drei Mengen. Das *kartesische Produkt* dieser Mengen ist wie folgt definiert:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B \text{ und } c \in C\}.$$

Analog definiert man das *kartesische Produkt* für eine beliebige Anzahl von Mengen A_1, \dots, A_n :

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Operationen auf Mengen IV

▶ Potenzmenge: $\mathcal{P}(A)$

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ ist die Menge aller Teilmengen der Menge A . Enthält die Menge A insgesamt $|A| = n$ Elemente, so enthält die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ insgesamt $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ Elemente.

Operationen auf Mengen VI

Beispiel:

Es seien die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$ gegeben. Dann gilt:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A \cap B = \{2, 3\}$$

$$A \setminus B = \{1\}$$

$$A \Delta B = \{1, 4\}$$

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Aufgabe 1

Es sei $M = \{1, 2\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Welche sind falsch?

- (i) $1 \in \mathcal{P}(M)$
- (ii) $2 \subseteq \mathcal{P}(M)$
- (iii) $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(M)$
- (iv) $\{1, 2\} \subseteq \mathcal{P}(M)$
- (v) $\{1, \{1\}\} \in \mathcal{P}(M)$
- (vi) $\{\{1\}, \{2\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$
- (vii) $\{\{1\}, \{2\}\} \subseteq \mathcal{P}(M)$
- (viii) $\{(1, 2)\} \subseteq \mathcal{P}(M)$
- (ix) $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))| = 2 + \sum_{i=1}^{15} \binom{16}{i}$
- (x) $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))| = 2 + \sum_{i=1}^3 \binom{4}{i}$

Abbildungen

Aufgabe 2

Bestimme die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.

Definition 1

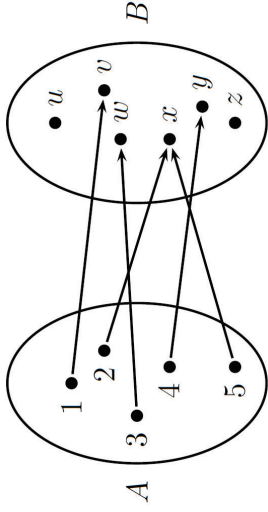
Eine *Funktion* (oder *Abbildung*) $f : A \rightarrow B$ stellt eine *Abbildungsvorschrift* dar, die jedem Element der Menge A ein Element der Menge B zuordnet.

Eine Funktion kann formal wie folgt geschrieben werden:

$$f : A \rightarrow B \\ a \mapsto f(a).$$

Definition II

Grafisch lässt sich eine Abbildung wie folgt veranschaulichen:



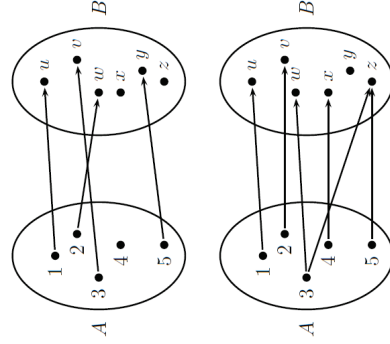
Definition IV

Bezeichnungen:

- ▶ **A:** Definitionsbereich, Urbildmenge
- ▶ **B:** Bildmenge, Bildbereich
- ▶ **A** → **B:** Signatur
- ▶ $a \mapsto f(a)$: Funktionsvorschrift, Abbildungsvorschrift
- ▶ **Wertebereich:** $W_f := f(A) = \{f(a) : a \in A\}$.
Nicht alle Elemente von **B** müssen ein Urbild haben. Es gilt $f(A) \subseteq B$.

Definition III

Bei den nachfolgenden Beispielen handelt es sich *nicht* um Abbildungen. (Wieso nämlich?)



Definition V

Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

Definitions- und Wertebereich der Funktion f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}; \\ W_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

Für dieses Beispiel gilt also $W_f \subset \mathbb{R}$.

Eigenschaften von Abbildungen I

Man nennt eine Abbildung

- ▶ *injektiv*, falls für alle $x, y \in A$ gilt: Aus $x \neq y$ folgt stets $f(x) \neq f(y)$;
- ▶ *surjektiv*, falls es zu jedem $b \in B$ mindestens ein $a \in A$ gibt, für das $f(a) = b$ gilt;
- ▶ *bijektiv*, falls sie injektiv und surjektiv ist.

Eigenschaften von Abbildungen III

Lösungen:

1. nicht injektiv, nicht surjektiv
2. injektiv, nicht surjektiv
3. nicht injektiv, surjektiv
4. injektiv, surjektiv, bijektiv

Eigenschaften von Abbildungen II

Beispiele:

1. Es sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$. $f : A \rightarrow B$ sei definiert durch $f(1) = 1$, $f(2) = 1$ und $f(3) = 2$.
2. Es sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4\}$. $f : A \rightarrow B$ sei definiert durch $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ und $f(3) = 4$.
3. Es sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{4, 5\}$. $f : A \rightarrow B$ sei definiert durch $f(1) = 4$, $f(2) = 5$ und $f(3) = 4$.
4. Es sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$. $f : A \rightarrow B$ sei definiert durch $f(1) = 4$, $f(2) = 5$ und $f(3) = 3$.

Eigenschaften von Abbildungen IV

Es sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung einer *endlichen* Menge A auf eine *endliche* Menge B . Es gilt:

- ▶ Ist $|A| > |B|$, so kann f nicht injektiv sein;
- ▶ Ist $|A| < |B|$, so kann f nicht surjektiv sein.

Wichtig: Dies gilt nur für endliche Mengen A und B .

Umkehrfunktion

Ist $f : A \rightarrow B$ eine bijektive Funktion, dann bezeichnet man mit $f^{-1} : B \rightarrow A$ die zugehörige Umkehrfunktion.

Der Funktionswert $f^{-1}(y)$ ist definiert als das eindeutig bestimmte $x \in A$, für das $f(x) = y$ gilt.

>> 25

Nachweis der Injektivität II

Aufgabe:

Entscheide, ob die folgende Funktion injektiv ist.

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(x) = 5x - 2$$

>> 27

Nachweis der Injektivität I

Der Nachweis der Injektivität erfolgt immer nach demselben einfachen Schema:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ \downarrow \\ x &= y. \end{aligned}$$

Ist $f(x) = f(y)$ nur genau dann wahr, wenn $x = y$ gilt, so ist die Funktion injektiv. Andernfalls ist sie nicht injektiv.

>> 26

Nachweis der Injektivität III

Lösung:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ 5x - 2 &= 5y - 2 \\ 5x &= 5y \\ x &= y \end{aligned}$$

Aus $f(x) = f(y)$ folgt nur die Lösung $x = y$. Dies bedeutet, dass keine zwei verschiedenen Elemente x und y auf denselben Wert abgebildet werden. Die Funktion ist also injektiv.

>> 28

Nachweis der Injektivität IV

Aufgabe:

Entscheide, ob die folgende Funktion injektiv ist.

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$f(a, b) = (a + b, a^2 + 7)$$

>> 29

Nachweis der Injektivität VI

Aus der zweiten Gleichung folgt $a = \pm c$.

Einsetzen in die erste Gleichung und Umstellen nach b ergibt zwei mögliche Lösungen:

$$(I) \quad a = c \qquad (II) \quad a = -c$$

$$b = d \qquad b = 2c + d$$

Da es mehr als eine Lösung gibt, folgt also insbesondere, dass die Abbildung nicht injektiv sein kann.

>> 31

Nachweis der Injektivität V

Lösung:

$$\begin{aligned} f(a, b) &= f(c, d) \\ (a + b, a^2 + 7) &= (c + d, c^2 + 7) \end{aligned}$$

Zwei Tupel sind genau dann gleich, wenn ihre Komponenten übereinstimmen. Es muss gelten:

$$\begin{aligned} a + b &= c + d \\ a^2 + 7 &= c^2 + 7. \end{aligned}$$

>> 30

Nachweis der Injektivität VII

Alternative Lösung:

Der Nachweis, dass die Funktion nicht injektiv ist, hätte auch durch Angabe eines Gegenbeispiels erfolgen können:

$$f(1, 2) = (3, 1) = f(-1, 4).$$

Da mehrere Elemente der Urbildmenge dasselbe Bild haben, ist die Funktion nicht injektiv.

>> 32

Nachweis der Injektivität VIII

Aufgabe:

Entscheide, ob die folgenden Funktionen injektiv sind.

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(x) = (x + 2)^2$$

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$g(x) = (x + 2)^2$$

$$h : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^3$$

$$h(a, b) = (ab, (a + 1)b, a(b^2 + 1))$$

Nachweis der Surjektivität I

Der Nachweis der Surjektivität ist im Allgemeinen deutlich schwieriger als der Nachweis der Injektivität.

Für jedes Element b der Bildmenge muss gezeigt werden, dass es mindestens ein Element a der Urbildmenge gibt, für das $f(a) = b$ gilt.

Es gibt leider kein allgemeingültiges Verfahren, dies zu bewerkstelligen. Eine Möglichkeit ist es jedoch, die Umkehrfunktion zu bestimmen, falls diese existiert.

Nachweis der Injektivität IX

Abschließend noch zwei Bemerkungen zur Injektivität:

- ▶ Falls die Bildmenge ein Tupel ist, ist keine Aussage über die Injektivität der Abbildung möglich, wenn die Injektivität lediglich für einzelne Komponenten gezeigt wurde.

$$f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$$

$$f(a, b) = (3a + 2, (b - 1)^2)$$

- ▶ Obwohl für keine der Komponenten Injektivität gilt, kann die gesamte Abbildung dennoch injektiv sein.

$$f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$$

$$f(a, b) = (a + b, a - b)$$

Nachweis der Surjektivität II

Aufgabe:

Entscheide, ob die folgende Funktion surjektiv ist.

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(x) = 5x - 2$$

Nachweis der Surjektivität III

Lösung:

Es gilt

$$y = f(x) = 5x - 2.$$

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, stellen wir die Gleichung nach x um:

$$\begin{aligned} 5x &= y + 2 \\ x &= \frac{y + 2}{5} \end{aligned}$$

Dies sieht wie die Umkehrfunktion aus, ABER im Allgemeinen gilt $\frac{y+2}{5} \notin \mathbb{Z}$. Beispielsweise hat $y = 1$ kein zugehöriges $x \in \mathbb{Z}$. Die Funktion ist also nicht surjektiv.

>> 37

© 2019 Steven Köhler

13. November 2019

Nachweis der Surjektivität V

Lösung:

Es gilt

$$y = f(x) = x + 7.$$

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, stellen wir die Gleichung nach x um:

$$x = y - 7.$$

Ist $y \in \mathbb{Z}$, so ist auch $y - 7 \in \mathbb{Z}$. Es bleibt zu prüfen, ob $y - 7$ tatsächlich ein Urbild für y ist. Einsetzen in f ergibt

$$\begin{aligned} f(y - 7) &= y - 7 + 7 \\ &= y. \end{aligned}$$

Die Funktion f ist also surjektiv.

>> 39

© 2019 Steven Köhler

13. November 2019

Nachweis der Surjektivität IV

Aufgabe:

Entscheide, ob die folgende Funktion surjektiv ist.

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(x) = x + 7$$

Nachweis der Surjektivität VI

Aufgabe:

Entscheide, ob die folgenden Funktionen surjektiv sind.

$$f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(a, b) = a + b$$

$$g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$g(x) = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$$

$$h : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^3$$

$$h(a, b) = (2a + 3b, a^2, (b - 1)^2 a)$$

>> 38

© 2019 Steven Köhler

13. November 2019

>> 40

© 2019 Steven Köhler

13. November 2019

Nachweis der Surjektivität VII

Abschließend noch zwei Bemerkungen zur Surjektivität:

- ▶ Ist eine Komponente einer Abbildung nicht surjektiv, so ist es auch die gesamte Abbildung nicht.

$$h : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^3$$

$$h(a, b) = (2a + 3b, a^2, (b - 1)^2 a)$$

- ▶ Ist jede Komponente einer Abbildung surjektiv, so muss dies dennoch nicht für die gesamte Abbildung gelten.

$$f(a) = (a, a + 1)$$

Verkettung von Funktionen II

Es gelten die folgenden Eigenschaften:

- ▶ Sind sowohl f als auch g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
- ▶ Sind sowohl f als auch g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

Verkettung von Funktionen I

Es sei $h : A \rightarrow C$ eine Komposition (Verkettung) der Funktionen $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$.

$$h = g \circ f$$

$$h(x) = g(f(x))$$

Statt Komposition kann man auch Nacheinanderausführung sagen. $g \circ f$ bedeutet also, g wird nach f ausgeführt.

Aufgabe 3

Entscheide für die folgenden Abbildungen, ob sie injektiv sind. Gib jeweils eine (kurze) Begründung.

- $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = (n - 2)^2$
- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = 42n - 23$
- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, f(n) = ((n - 3)^2, n^2)$
- $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, f(a, b) = (ba, 5a + 1)$
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n, m) = 7n - m$
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, f(x, y) = (xy^3, xy^3 - 2y - 9, (y^2 - 5)x)$

Aufgabe 4

Entscheide für die folgenden Abbildungen, ob sie surjektiv sind. Gib jeweils eine (kurze) Begründung.

- a) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = 23n - 42$
- b) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, f(n) = ((n+5)^2, n^2)$
- c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, f(n, m) = (n+m-2, n+1)$
- d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n, m) = 7n - m$
- e) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n, m) = n + m$

Wahrheitswerte

Aufgabe 5

Gibt es bijektive Abbildungen $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$? Gib im Falle der Existenz eine solche Abbildung an; begründe im Fall der Nicht-Existenz, wieso eine solche Abbildung nicht existiert.

Logische Verknüpfungen I

A und B seien Aussagen, die entweder wahr oder falsch sein können.

- ▶ Konjunktion: $A \wedge B$
Die Aussage $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr ist.
- ▶ Disjunktion: $A \vee B$
Die Aussage $A \vee B$ ist wahr, wenn entweder A oder B wahr ist; oder natürlich auch beide.

Logische Verknüpfungen II

A und B seien Aussagen, die entweder wahr oder falsch sein können.

► Implikation: $A \Rightarrow B$

Die Aussage $A \Rightarrow B$ bedeutet, dass immer, wenn A wahr ist, auch B wahr ist. („ B folgt aus A .“)

► Biimplikation: $A \Leftrightarrow B$

Die Aussage $A \Leftrightarrow B$ bedeutet, dass immer, wenn A wahr ist, auch B wahr ist – und umgekehrt. („genau dann wenn“)

Logische Verknüpfungen IV

A	B	\bar{A}	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \text{ xor } B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

Logische Verknüpfungen III

A sei eine Aussage, die entweder wahr oder falsch sein kann.

► Negation: \bar{A}

Die Aussage \bar{A} ist genau dann wahr, wenn die Aussage A falsch ist.

Aufgabe 6

Es seien A und B zwei Wahrheitswerte. Zeige mithilfe einer Wahrheitstafel, dass es sich bei $A \Leftrightarrow B$ und $(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$ um zwei äquivalente Aussagen handelt.