

# Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 15.11.2019  
(Teil 1, Lösungen)

13. November 2019

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

## Aufgabe 1

Es sei  $M = \{1, 2\}$ . Es gilt

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(M)) = \{A \mid A \subseteq \mathcal{P}(M)\}.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar:

- |             |               |
|-------------|---------------|
| (i) falsch  | (vi) wahr     |
| (ii) falsch | (vii) wahr    |
| (iii) wahr  | (viii) falsch |
| (iv) falsch | (ix) falsch   |
| (v) falsch  | (x) wahr      |

## Aufgabe 2

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

## Aufgabe 3a

$f(n)$  ist nicht injektiv, da beispielsweise gilt:

$$f(1) = 1 = f(3).$$

## Aufgabe 3b

$f(n)$  ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned} f(n) &= f(m) \\ 42n - 23 &= 42m - 23 \\ 42n &= 42m \\ n &= m \end{aligned}$$

### Aufgabe 3c

$f(n)$  ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned} f(n) &= f(m) \\ ((n-3)^2, n^2) &= ((m-3)^2, m^2) \end{aligned}$$

Es folgt

$$(n-3)^2 = (m-3)^2 \quad (1)$$

$$n^2 - 6n + 9 = m^2 - 6m + 9$$

$$n^2 = m^2 \quad (2)$$

Subtraktion von (1) und (2) ergibt:

$$-6n + 9 = -6m + 9$$

$$n = m$$

### Aufgabe 3d

$f(a, b)$  ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned} f(a, b) &= f(x, y) \\ (ba, 5a + 1) &= (yx, 5x + 1) \end{aligned}$$

Es folgt

$$ba = yx \quad (1)$$

$$5a + 1 = 5x + 1 \quad (2)$$

Aus (2) folgt direkt  $a = x$ . Einsetzen in (1) und Division durch  $a$  ( $a \neq 0$  wegen  $a \in \mathbb{N}$ ) ergibt  $b = y$ ; und somit  $(a, b) = (x, y)$ .

## Aufgabe 3e

$f(n, m)$  ist nicht injektiv, da beispielsweise gilt:

$$f(1, 0) = 7 = f(2, 7).$$

## Aufgabe 3f

$f(x, y)$  ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) \\ (xy^3, xy^3 - 2y - 9, (y^2 - 5)x) &= (ab^3, ab^3 - 2b - 9, (b^2 - 5)a) \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} xy^3 &= ab^3 & (1) \\ xy^3 - 2y - 9 &= ab^3 - 2b - 9 & (2) \\ (y^2 - 5)x &= (b^2 - 5)a & (3) \end{aligned}$$

Subtraktion von (1) und (2) und anschließendes Umformen ergibt  $y = b$ . Einsetzen in (3) und Division durch  $y^2 - 5$  ( $\neq 0$  für  $y \in \mathbb{Z}$ ) liefert  $x = a$ ;

## Aufgabe 4a

$f(n)$  ist nicht surjektiv, da beispielsweise kein Urbild für  $f(n) = 0$  existiert.

## Aufgabe 4b

$f(n)$  ist nicht surjektiv, da beispielsweise  $f(n) = (\star, 2)$  kein Urbild besitzt.

## Aufgabe 4c

$f(n, m)$  ist surjektiv. Sei  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  das Bild von  $f(n, m)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}f(n, m) &= (x, y) \\(n + m - 2, n + 1) &= (x, y)\end{aligned}$$

$$n + m - 2 = x \quad (1)$$

$$n + 1 = y \quad (2)$$

Aus (2) folgt direkt  $n = y - 1$ . Einsetzen in (1) liefert  $m = x - y + 3$ . Es gilt  $(y - 1, x - y + 3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Abschließend muss noch geprüft werden, ob tatsächlich ein Urbild für  $(x, y)$  vorliegt:

$$\begin{aligned}f(y - 1, x - y + 3) &= (y - 1 + x - y + 3 - 2, y - 1 + 1) \\&= (x, y)\end{aligned}$$

## Aufgabe 4d

$f(n, m)$  ist surjektiv, da beispielsweise  $(0, -y)$  ein Urbild für  $f(n, m) = y$  ist:

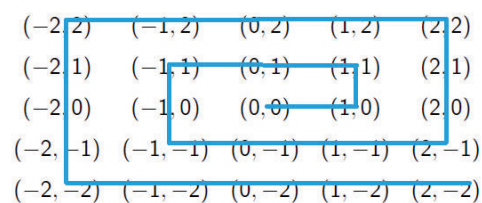
$$f(0, -y) = 7 \cdot 0 - (-y) = y.$$

## Aufgabe 4e

$f(n, m)$  ist nicht surjektiv, da keine natürlichen Zahlen  $n, m$  mit  $f(n, m) = 1$  existieren.

## Aufgabe 5

Eine bijektive Abbildung  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  kann mithilfe des folgenden Schemas gefunden werden:



Hieraus lässt sich bspw. die folgende bijektive Abbildung erstellen:

$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	3	-3	...
$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	(0, 0)	(1, 0)	(1, 1)	(0, 1)	(-1, 1)	(-1, 0)	(-1, -1)	...



## Aufgabe 6

$A$	$B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1

Die Spalten für  $A \Leftrightarrow B$  und  $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$  stimmen überein  
– die beiden Aussagen sind folglich äquivalent.